第 46 卷 第 4 期
2023 年 4 月
核 技 术 NUCLEAR TECHNIQUES
www.hjs.sinap.ac.cn
Vol.46, No.4
April 2023

重离子碰撞中守恒荷涨落与QCD相变的输运模型研究

陈 倩[1,2,3,4] 马国亮[1,2,3,4] 陈金辉[1,2]
1（复旦大学 现代物理研究所 上海 200433）
2（理论物理专款上海核物理理论研究中心 上海 200438）
3（中国科学院上海应用物理研究所 上海 201800）
4（中国科学院大学 北京 100049）

摘要 相对论重离子对撞机（Relativistic Heavy Ion Collider，RHIC）-STAR（Solenoid Tracker at RHIC）实验测量了 $\sqrt{s_{\rm NN}}$ =7.7~200 GeV 能量下 Au+Au 碰撞中的净质子（净重子的代表）、净电荷和净 K 介子（净奇异数的代表）多重数分布的累积量，发现净质子四阶累积量与二阶累积量之比（$\kappa\sigma^2$）呈现出了非单调的能量依赖性行为。在相对论重离子碰撞实验中只能测到末态粒子的信息。因此，基于多相输运（A Multi-Phase Transport，AMPT）模型对 Au+Au 碰撞系统中守恒荷（重子数、电荷数和奇异数）的涨落性质进行了研究，发现 AMPT 模型的结果基本能描述 RHIC-STAR 实验结果。更重要的是，利用 AMPT 模型了解了相对论重离子碰撞动力学演化过程中几个关键效应（守恒荷粒子的产生和扩散、强子化、强子再散射和弱衰变）对守恒荷涨落演化及其粒子关联函数的影响。发现正负电荷之间关联可能源于弦熔化机制，重子（质子）关联函数符合重子数守恒期望，奇异数（净 K 介子）的关联函数源于对产生，这些代表量与守恒荷的对应关系行为上定性一致，但数量不同。虽然 AMPT 模型目前缺乏临界涨落机制，但我们的结果可以为守恒荷涨落的研究提供一条基线，这有助于在相对论重离子碰撞中寻找量子色动力学（Quantum Chromodynamics，QCD）临界点（Critical End Point，CEP）附近可能的临界行为。初步在模型中考虑临界密度涨落，结果发现它起着一定的作用。

关键词 守恒荷，涨落，累积量，关联函数，QCD 相变，临界点
中图分类号 O41，O56
DOI: 10.11889/j.0253-3219.2023.hjs.46.040013

Transport model study of conserved charge fluctuations and QCD phase transition in heavy-ion collisions

CHEN Qian[1,2,3,4] MA Guoliang[1,2,3,4] CHEN Jinhui[1,2]
1(*Key Laboratory of Nuclear Physics and Ion-beam Application* (*MOE*), *Institute of Modern Physics*, *Fudan University*, *Shanghai 200433*, *China*)
2(*Shanghai Research Center for Theoretical Nuclear Physics*, *NSFC and Fudan University*, *Shanghai 200438*, *China*)
3(*Shanghai Institute of Applied Physics*, *Chinese Academy of Sciences*, *Shanghai 201800*, *China*)

国家重点研发计划(No.2022YFA1604900)、国家自然科学基金(No.12147101, No.11890714, No.11835002, No.11961131011, No.11421505)、中国科学院战略优先研究计划(No.XDB34030000)、广东省基础与应用基础研究重大项目(No.2020B0301030008)资助
第一作者：陈倩，女，1994年出生，2018年毕业于广西师范大学，现为博士研究生，研究领域为相对论重离子碰撞
通信作者：马国亮，E-mail：glma@fudan.edu.cn；陈金辉，E-mail：chenjinhui@fudan.edu.cn
收稿日期：2023-02-14，修回日期：2023-04-02
Supported by the National Key Research and Development Program of China (No.2022YFA1604900), National Natural Science Foundation of China (No. 12147101, No. 11890714, No. 11835002, No. 11961131011, No. 11421505), the Strategic Priority Research Program of Chinese Academy of Sciences (No.XDB34030000), the Guangdong Major Project of Basic and Applied Basic Research (No.2020B0301030008)
First author: CHEN Qian, female, born in 1994, graduated from Guangxi Normal University in 2018, doctoral student, focusing on relativistic heavy-ion collisions
Corresponding author: MA Guoliang, E-mail: glma@fudan.edu.cn; CHEN Jinhui, E-mail: chenjinhui@fudan.edu.cn
Received date: 2023-02-14, revised date: 2023-04-02

4(*University of Chinese Academy of Sciences*, *Beijing 100049*, *China*)

Abstract The RHIC-STAR (Relativistic Heavy Ion Collider-Solenoid Tracker at RHIC) experiments have measured the cumulants of net-proton (a proxy for net-baryon), net-charge, and net-kaon (proxy of net-strangeness) multiplicity distributions in Au+Au collisions at different centers of mass with energies ranging from 7.7 GeV to 200 GeV. Recent results have shown that the ratio of the fourth-order net-proton cumulant over the second-order one ($\kappa\sigma^2$) exhibits a nonmonotonic energy dependence. In relativistic heavy-ion collision experiments, only information about the final state particles can be measured. Therefore, we investigated the fluctuations of the conserved charges (baryon, electric charge, and strangeness) in Au+Au collisions using a multiphase transport (AMPT) model. This model can basically describe the results measured by the RHIC-STAR experiment. More importantly, the AMPT model is used to understand the key impacts of the dynamical evolution of relativistic heavy-ion collisions on fluctuations and correlation functions, including the creation and diffusion of conserved charges, hadronization, hadronic rescatterings, and weak decays. It was discovered that the correlation between positive and negative charges may originate from the string melting mechanism. Baryon (proton) correlation functions are consistent with the expectation of baryon number conservation. Net-strangeness (net-kaon) originates from pair production. We studied the correspondence between representative quantities and their conserved charges and found that their behaviors are qualitatively consistent yet quantitatively different. Although the physics of quantum chromodynamics (QCD) critical fluctuations is not included in the AMPT model, our results are expected to provide a baseline for the search of possible critical behavior at the QCD critical end point in relativistic heavy-ion collisions. We incorporated critical density fluctuations into the model and found that they play a role.

Key words Conserved charge, Fluctuation, Cumulants, Correlation functions, QCD phase transition, Critical end point (CEP)

量子色动力学(Quantum Chromodynamics，QCD)是描述夸克和胶子之间强相互作用的基本理论[1-3]。QCD理论已经成功地描述了大量的实验现象——从强子谱到深度非弹性散射的少体过程。研究热密QCD物质的性质对于理解早期宇宙状态、致密天体形成和演化等自然现象是至关重要的。相对论重离子碰撞实验是目前研究高温高密QCD物质性质的唯一实验手段。在相对论重离子碰撞过程中，众多高能核子参与碰撞，极易产生高温或高能量密度的条件，因此可以导致QCD物质发生相变。QCD理论研究表明，在高温或高密状态下，被禁闭于强子内部的夸克和胶子(禁闭相)会发生退禁闭现象产生夸克胶子等离子体(Quark Gluon Plasma，QGP)(退禁闭相)，故QCD相图结构的研究多年来一直是QCD物质强相互作用理论和实验研究的重点研究方向[4-6]。一个多体系统的热力学性质可以用热力学参数空间中的相图表示。在QCD物质的情况下(图1)存在一个T-μ_B的QCD相图，为温度T和重子数化学势μ_B的函数。相图中不同区域对应着QCD物质不同的存在状态相，具有着不同的对称性。相图中最为重要的位置是相变临界点(Critical End Point，CEP)，它可以告知我们相图的基本结构信息。格点QCD第一性原理[7-10]计算研究表明，在重子化学势(μ_B)消失时的相变为平滑交叉过渡区域[11]，临界温度为$T_c \cong 160$ MeV[12-13]，而一些有效QCD模型预测在大μ_B区域将发生一阶相变[14-15]，一阶相变曲线与平滑过渡区域相交的点称为QCD临界点[12,16-18]。实验上对于CEP的寻找采取了很多测量方法：比如集体流[19-20]、HBT(Hanbury-Brown-Twiss)半径[21]、轻核产额比[22-24]、守恒荷涨落等[25-32]；同时，理论上在这些方面都做了很多的研究[6-10,16,33-45]。理论上关联长度将在临界点附近发散，由于守恒荷的涨落对关联长度非常敏感[46-53]，且格点QCD计算表明，守恒荷的涨落与磁化率有关[10,54-55]，因此，守恒荷的涨落被认为是一个很有前景的观测信号[46-47,54]。

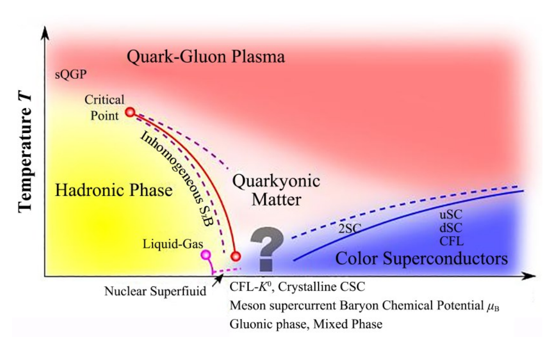


图1　QCD相图[56]
Fig.1　QCD phase diagram[56]

对于QCD相图结构的研究，相对论重离子碰撞实验在美国布鲁克海文(Brookhaven National Laboratory，BNL)国家实验室的相对论重离子对撞机(Relativistic Heavy Ion Collider，RHIC)和欧洲核子中心(European Organization for Nuclear Research，CERN)的大型强子对撞机(Large Hadron Collider，LHC)进行了大量的工作，这些实验化学冻结时提供的重子化学势范围为$\mu_B \approx 750$ MeV到零重子化学势区域[57]，未来国内的实验装置能达到更大重子化学势区域[58]。RHIC第一期能量扫描实验已经测量了Au+Au碰撞系统中$\sqrt{s_{NN}}$=7.7~200 GeV的净质子(净重子的代表)、净电荷和净K介子(净奇异数的代表)多重数分布的累积量[59−62]。最近，RHIC实验基于净质子高阶累积量的测量结果预测了临界现象可能发生在$3 < \sqrt{s_{NN}} < 20$ GeV[63]。本文将围绕高能重离子碰撞中守恒荷的涨落这一热点课题，介绍国内外相关前沿研究进展和总结多年来我们利用输运模型等开展的一系列的研究成果。

1 研究方法

1.1 计算方法

在统计学中，概率分布的各种特征可以用不同的矩来表征，如均值(M)、方差(σ)、偏度(S)、峰度(κ)，而一个随机变量的累积量是指一系列能够提供和矩一样信息的量，通常累积量的计算我们可以使用累积生成函数来表示。目前，实验上探测技术只能探测到末态粒子的多重数、电荷、动量等信息，对于守恒荷涨落问题，主要是通过逐事件计算守恒荷(重子数、电荷数和奇异数)多重数分布的累积量来研究。守恒荷多重数分布的各阶累积量C_n为[25,28,64−65]：

$$C_1 = \langle N \rangle,\ C_2 = \langle (\delta N)^2 \rangle,$$
$$C_3 = \langle (\delta N)^3 \rangle,\ C_4 = \langle (\delta N)^4 \rangle - 3\langle (\delta N)^2 \rangle^2 \tag{1}$$

式中：N是逐事件里的粒子数，其偏差为$\delta N = N - \langle N \rangle$，而$\langle ... \rangle$表示事件平均值。根据累积量的定义，可以得到各阶矩：

$$M = C_1 = \langle N \rangle,\ \sigma^2 = C_2 = \langle (\delta N)^2 \rangle,$$
$$S = \frac{C_3}{(C_2)^{3/2}} = \frac{\langle (\delta N)^3 \rangle}{\sigma^3},$$
$$\kappa = \frac{C_4}{(C_2)^2} = \frac{\langle (\delta N)^4 \rangle}{\sigma^4} - 3 \tag{2}$$

式中：均值(M)表示分布的平均值；方差(σ)表示分布的分散程度；偏度(S)表示分布的不对称性；峰度(κ)描述分布偏离于正态分布峰值特征的程度。而在热力学平衡系统中(如巨正则系综)可以用QCD配分函数的对数，即它的无量纲压强来表征[10]：

$$\frac{P}{T} = \frac{1}{VT^3} \ln \left[Z\left(V, T, \mu_B, \mu_Q, \mu_S\right) \right] \tag{3}$$

式中：V和T为系统的体积和温度；μ_B、μ_Q和μ_S分别为重子(B)化学势、电荷(Q)化学势和奇异(S)化学势。对于具有不同自由度和相互作用的热力学平衡系统可以通过守恒荷的涨落来确定，在格点QCD理论中，这些量的涨落可以用守恒荷的磁化率来量化：

$$\chi_{ijk}^{BQS} = \frac{\partial^{(i+j+k)}\left[P/T^4\right]}{\partial \hat{\mu}_B^i \partial \hat{\mu}_Q^j \partial \hat{\mu}_S^k} \tag{4}$$

式中：$\hat{\mu}_q = \mu_q/T$，下标q = B, Q, S。则这些守恒荷的累积量与相应的磁化率的关系可以表示为[10]：

$$C_{ijk}^{BQS} = \frac{\partial^{(i+j+k)} \ln\left[Z\left(V, T, \mu_B, \mu_Q, \mu_S\right)\right]}{\partial \hat{\mu}_B^i \partial \hat{\mu}_Q^j \partial \hat{\mu}_S^k} =$$
$$VT^3 \chi_{ijk}^{BQS}\left(T, \mu_B, \mu_Q, \mu_S\right) \tag{5}$$

通过式(2)和(5)可以得到累积量比率(矩乘积)，定义如下[10]：

$$\frac{\chi_2}{\chi_1} = \frac{C_2}{C_1} = \frac{\sigma^2}{M},\ \frac{\chi_3}{\chi_2} = \frac{C_3}{C_2} = S\sigma,\ \frac{\chi_4}{\chi_2} = \frac{C_4}{C_2} = \kappa\sigma^2 \tag{6}$$

涨落和关联可谓一对形影不离的伙伴。我们还可以根据多重数分布的累积量从而得到其关联函数。因为累积量有一个缺点，就是它混合了不同阶的关联函数，所以研究其多粒子(积分)关联函数往往更具有指导意义[6,66−67]，利用以下关系式可从累积量获得n粒子关联函数κ_n(也称为阶乘累积量)：

$$\kappa_1 = C_1 = \langle N \rangle,\ \kappa_2 = -C_1 + C_2,$$
$$\kappa_3 = 2C_1 - 3C_2 + C_3,\ \kappa_4 = -6C_1 + 11C_2 - 6C_3 + C_4 \tag{7}$$

反之，从n粒子关联函数κ_n得出其与累积量的关系为：

$$C_2 = \kappa_2 + \kappa_1,\ C_3 = \kappa_3 + 3\kappa_2 + \kappa_1,$$
$$C_4 = \kappa_4 + 6\kappa_3 + 7\kappa_2 + \kappa_1 \tag{8}$$

累积量比率也可用归一化关联函数κ_n/κ_1(n>1)表示：

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{\kappa_2}{\kappa_1} + 1,\ \frac{C_3}{C_2} = \frac{\kappa_3/\kappa_1 - 2}{\kappa_2/\kappa_1 + 1} + 3,$$
$$\frac{C_4}{C_2} = \frac{\kappa_4/\kappa_1 + 6\kappa_3/\kappa_1 - 6}{\kappa_2/\kappa_1 + 1} + 7 \tag{9}$$

所以，根据式(9)可用归一化关联函数进一步理解涨落。但需要注意的是这里也存在另一个问题，上述式(7)~(9)只适用于分析一种类型的粒子关联函数。而对于计算净粒子的关联函数则需要考虑两

种类型的粒子，例如净K介子（$\Delta N_K = N^{K^+} - N^{K^-}$），会涉及到$K^+$和$K^-$，那么则需要用到复杂的计算方法[6,68]。可以根据文献[68]提到的阶乘矩来计算其关联函数，则阶乘矩与关联函数之间有以下的关系：

$$\begin{aligned}
&\kappa_2^{(2,0)} = -F_{1,0}^2 + F_{2,0},\\
&\kappa_2^{(1,1)} = -F_{0,1}F_{1,0} + F_{1,1},\\
&\kappa_3^{(3,0)} = 2F_{1,0}^3 - 3F_{1,0}F_{2,0} + F_{3,0},\\
&\kappa_3^{(2,1)} = 2F_{0,1}F_{1,0}^2 - 2F_{1,0}F_{1,1} - F_{0,1}F_{2,0} + F_{2,1},\\
&\kappa_4^{(4,0)} = -6F_{1,0}^4 + 12F_{1,0}^2F_{2,0} - 3F_{2,0}^2 - 4F_{1,0}F_{3,0} + F_{4,0},\\
&\kappa_4^{(3,1)} = -6F_{0,1}F_{1,0}^3 + 6F_{1,0}^2F_{1,1} + 6F_{0,1}F_{1,0}F_{2,0} - 3F_{1,1}F_{2,0} - 3F_{1,0}F_{2,1} - F_{0,1}F_{3,0} + F_{3,1},\\
&\kappa_4^{(2,2)} = \left(-6F_{0,1}^2 + 2F_{0,2}\right)F_{1,0}^2 + 8F_{0,1}F_{1,0}F_{1,1} - 2F_{1,1}^2 - 2F_{1,0}F_{1,2} + \left(2F_{0,1}^2 - F_{0,2}\right)F_{2,0} - 2F_{0,1}F_{2,1} + F_{2,2}
\end{aligned} \tag{10}$$

如以K^+和K^-为例，其中$F_{i,k} = \left\langle \frac{N!}{(N-i)!}\frac{\overline{N}!}{(\overline{N}-k)!} \right\rangle$表示$i$个$K^+$介子和$k$个$K^-$介子，$\kappa_n^{(i,k)}$表示$n(n = i + k)$个粒子的关联函数。对于其余$k > i$情况下的关联函数$\kappa_n^{(i,k)}$的计算只要将上式阶乘矩的下角标对换（$F_{i,k} \leftrightarrow F_{k,i}$）一下即可。如果$i$和$k$都不为0，则$\kappa_n^{(i,k)}$为混合关联函数。如果$i$和$k$分别表示$K^+$和$K^-$的数量，那么$\kappa_n^{(i,k)}$表示$i$个$K^+$和$k$个$K^-$的n粒子关联函数。如果$i$或者$k$其一为0，表示只含有一种粒子的纯关联函数。如$\kappa_n^{(i,0)}$和$\kappa_n^{(0,k)}$分别表示为只含有$i$个$K^+$的n粒子纯关联函数和$k$个$K^-$的n粒子纯关联函数。通过上述关联函数也可以得到其与净K介子的累积量的关系[6,68-70]：

$$\begin{aligned}
&C_2 = \langle N \rangle + \langle \overline{N} \rangle + \kappa_2^{(2,0)} + \kappa_2^{(0,2)} - 2\kappa_2^{(1,1)},\\
&C_3 = \langle N \rangle - \langle \overline{N} \rangle + 3\kappa_2^{(2,0)} - 3\kappa_2^{(0,2)} + \kappa_3^{(3,0)} - \kappa_3^{(0,3)} - 3\kappa_3^{(2,1)} + \kappa_3^{(1,2)},\\
&C_4 = \langle N \rangle + \langle \overline{N} \rangle + 7\kappa_2^{(2,0)} + 7\kappa_2^{(0,2)} - 2\kappa_2^{(1,1)} + 6\kappa_3^{(3,0)} + 6\kappa_3^{(0,3)} - 6\kappa_3^{(2,1)} +\\
&\qquad 6\kappa_3^{(1,2)} + \kappa_4^{(4,0)} + \kappa_4^{(0,4)} - 4\kappa_4^{(3,1)} - 4\kappa_4^{(1,3)} + 6\kappa_4^{(2,2)}
\end{aligned} \tag{11}$$

下文中，我们将利用以上公式计算不同守恒荷涨落的相关物理量。

1.2 AMPT模型

多相输运（A Multi-Phase Transport，AMPT）模型[71]已被广泛用于研究相对论重离子碰撞[72-78]。具有弦熔化机制的AMPT模型是一个包含4个子软件包的混合模型，用于模拟相对论重子碰撞的4个主要阶段。它使用重离子喷注相互作用发生器（Heavy Ion Jet Interaction Generator，HIJING）来模拟初始条件，主要提供来自QCD硬过程和软的激发弦的空间和动量分布[79-80]。许多母核强子（包括奇异介子和奇异重子）都是由迷你喷注部分子和激发弦的融化而短暂产生的[81]。为了模拟部分子物质，这些母核强子将被利用弦熔化机制，根据夸克组分的味和自旋结构分裂成原始夸克和反夸克。用Zhang的部分子级联（Zhang's Parton Cascade，ZPC）模型[82]模拟夸克等离子体内部的部分子相互作用，目前该模型只考虑了两体弹性散射，使用的是微扰QCD散射截面（例如通常取3 mb）。当所有的部分子停止相互作用时，强子化过程由一个夸克组合模型来将部分子组合合成强子。利用相对论输运（A Relativistic Transport，ART）模型[83]来模拟强子相中强子之间的相互作用，包括了介子-介子、介子-重子和重子-重子的散射过程，对于反粒子和奇异性产生都有考虑，同时也考虑了核子的平均场效应和同位旋效应。为了与实验数据进行比较，我们的模拟还包括共振衰变，包括了不稳定奇异强子（如Λ、Ω、Ξ、Σ和ϕ）的共振衰变。

以上介绍的是公开发布的AMPT模型，为了更好地研究守恒荷的涨落问题，我们还对公开发布的AMPT模型进行了相关改进，下面介绍主要的两点改进：

一、采用了电荷守恒版的AMPT模型，该版本的AMPT模型确保了强子相演化过程中所有强子反应通道中的各种守恒荷（重子数、电荷数和奇异数）的守恒。在旧版本的AMPT模型中总电荷没有守恒主要有两个原因：1）在旧版本中，强子再散射过程中只把K^+和K^-作为明确的粒子引入，而忽略了K^0和$\overline{K}^0$。为了有效地包含K^0和$\overline{K}^0$，旧版中在强子再散射之前将K^0替换为K^+，将$\overline{K}^0$替换为K^-，在强子再散射之后模型再将一半的K^+和K^-分别替换为K^0和$\overline{K}^0$。这就违背了电荷守恒和奇异数守恒；2）在旧版本中，并没有考虑强子反应通道或共振衰变的所有可能的同位旋模式，取而代之的是同位旋平均的截面处理，在这种处理中最终态粒子的电荷从所有可能的电荷中随机选择，与初始态的电荷无关，从而引起总电荷不能守恒。例如，$\pi^+ + \pi^+$应该被允许进入$\rho^+ + \rho^+$而不是$\rho^+ + \rho^-$和$\rho^- + \rho^-$。为了解决这两个主要问题，在

AMPT模型的电荷守恒版本K^0和$\bar{K}^0$被明确地引入。另一方面，对所有有问题的反应通道进行了修正，以确保所有反应通道都满足重子数、电荷数和奇异数守恒，在细致平衡原理下确保每一对正反反应通道处于平衡状态。

二、引入了一种新的夸克组合模型[84]，该模型改进了强子化过程的处理方法。新的夸克组合模型中夸克是根据与其合并伙伴的距离判断形成介子还是重子[84]，而不是像之前的夸克组合模型[71]中简单地将最近的夸克合并为强子。研究表明，在相对论重离子碰撞中具有新的夸克组合机制的弦熔化版AMPT模型可以更好地描述物质的性质，特别是奇异强子的产生。另一方面，在新的夸克组合模型中净电荷数、净重子数和净奇异数守恒，而不是像之前的夸克组合模型中需要不必要的单独守恒。

本综述主要阐述的是利用AMPT模型对涨落的研究，在接下来的章节将按照通过对不同类型粒子的性质研究来对不同守恒荷的涨落进行详细的讨论。而相对论重离子碰撞实际上是一个复杂的动力学演化过程，包括几个重要的演化阶段。为了更好地理解涨落观测量的动力学演化过程，有必要研究每个演化阶段的累积量和关联函数，我们主要围绕以下表1中的几个演化阶段进行研究。

表1　具有弦熔融机制的AMPT模型的5个演化阶段的定义
Table 1　Five evolution stages in the AMPT model with a string melting mechanism

演化阶段 Stage	定义 Description
(a) 初态 Initial state	由A+A碰撞产生的夸克和反夸克组成的初始状态的部分子物质 The initial state of partonic matter consisting of quarks and antiquarks created by A+A collisions
(b) 部分子级联 After parton cascade	由经历了部分子级联的夸克和反夸克组成的最终状态的部分子物质 The final state of partonic matter consisting of quarks and antiquarks that have undergone parton cascade
(c) 强子化 After hadronization	由冻出后的部分子物质通过组合强子化模型转变来的初始状态的强子物质 The initial state of hadronic matter transformed from the freeze-out partonic matter through the hadronization of coalescence
(d) 强子再散射 After hadronic rescatterings	经历了强子再散射阶段后冻出的强子物质 The freeze-out hadronic matter which has undergone hadronic rescatterings
(e) 末态 Final state	考虑了弱衰变的最终状态的强子物质 The final state of hadronic matter with considering weak decays

为了给出一个较直观的理解，图2~4分别展示了同一能量$\sqrt{s_{NN}}$ = 7.7 GeV下Au+Au中心碰撞事件中在不同演化阶段的正反电荷、正反重子数、正反奇异数在坐标空间横向平面的密度分布。注意：对于电荷数涨落性质的研究我们忽略了弱衰变阶段，因为从图2(d)、(e)两个不同演化阶段可以发现，弱衰变对电荷数密度分布影响不大。对于重子数涨落性质的研究直接将强子再散射和弱衰变效应一起合并研究，直接合写为末态，因为从图3(d)、(e)两个不同演化阶段也可以看出，弱衰变对重子数密度分布影响不大。但对于奇异数涨落性质的研究，我们将考虑每个演化阶段(图4)，后文将具体讨论。

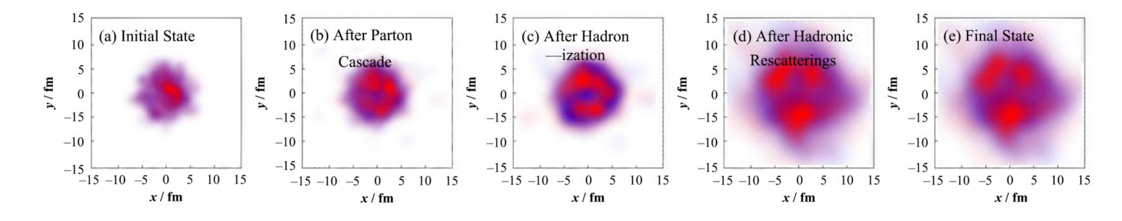


图2　$\sqrt{s_{NN}}$ = 7.7 GeV能量下Au+Au中心碰撞，AMPT模型中正电荷(红色)和负电荷(蓝色)在不同演化阶段的密度分布图
Fig.2　AMPT results on the density distributions of Q^+ (red) and Q^- (blue) at different evolution stages for a selected central Au+Au collision event at $\sqrt{s_{NN}}$ = 7.7 GeV

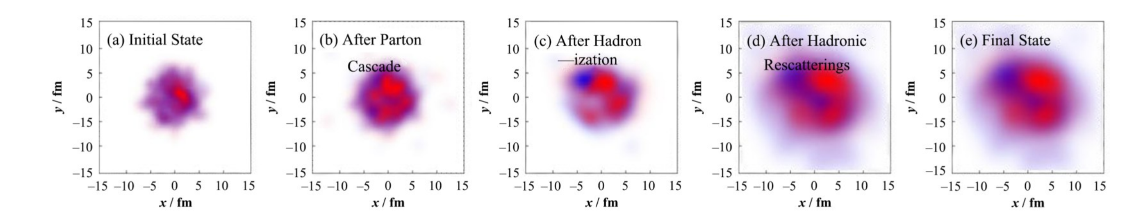


图3 $\sqrt{s_{NN}}$ = 7.7 GeV能量下Au+Au中心碰撞，AMPT模型中正重子(红色)和反重子(蓝色)在不同演化阶段的密度分布图
Fig.3 AMPT results on the density distributions of baryon (red) and anti-baryon (blue) at different evolution stages for a selected central Au+Au collision event at $\sqrt{s_{NN}}$ = 7.7 GeV

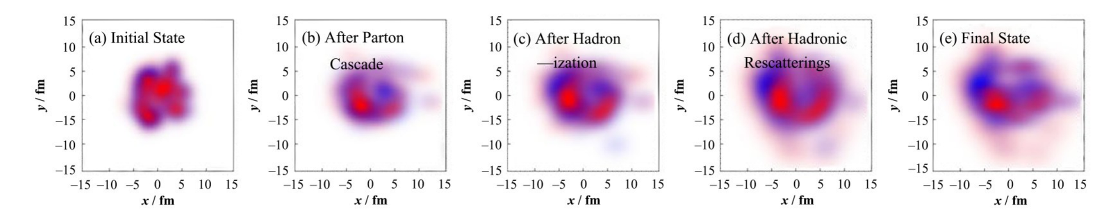


图4 $\sqrt{s_{NN}}$ = 7.7 GeV能量下Au+Au中心碰撞，AMPT模型中s(红色)和$\bar{s}$(蓝色)奇异数在不同演化阶段的密度分布图
Fig.4 AMPT results on the density distributions of s (red) and $\bar{s}$ (blue) constitutive quarks at different evolution stages for a selected central Au+Au collision event at $\sqrt{s_{NN}}$ = 7.7 GeV

2　净电荷涨落性质

2014年，STAR实验合作组第一次发表了Au+Au碰撞系统的净电荷多重数分布的不同阶矩结果[59]，尽管其偏离泊松分布或负二项分布的期望值，但是无论是碰撞中心度依赖性还是能量依赖性的结果都是单调变化的，并没有观察到非单调的行为。我们使用AMPT模型计算了净电荷多重数分布矩的动态演化，侧重研究连接格点QCD计算和末态实验测量之间的动力学演化过程。为了对比分析，我们选取了跟STAR实验组一样的选择条件[59]，选取了横动量0.2 GeV·c^{-1} < p_T < 2.0 GeV·c^{-1}和赝快度$|\eta|$ < 0.5范围内的带电粒子来计算净电荷多重数分布的矩及其乘积。我们采用了带电粒子多重数来划分碰撞中心度，在这里为了避免自关联效应(Avoid the self-correlation Effect，ACE)，排除了赝快度在$|\eta|$ < 0.5的带电粒子，应用Δ理论公式来计算统计误差[26,25,85]。为了抑制由于中心度间隔宽度的体积涨落和初始核体积(几何)带来的体积涨落[28,86-88]，即中心度间隔宽度效应(Centrality Bin Width Effect，CBWE)，我们采用了中心度间隔宽度修正(Centrality Bin Width Correction，CBWC)来计算矩和累积量[26,25]，因为无论是STAR实验结果还是AMPT结果都表明CBWC对高阶累积量或高阶矩有显著改善，特别是对于更中心的中心碰撞[26,89]。

2.1　净电荷矩积能量依赖性

基于AMPT模型研究了净电荷矩积的能量依赖性，选取了最中心碰撞和边缘碰撞进行分析，并且把有无进行CBWC的AMPT模型数据都予以考虑，均与STAR实验数据进行了比较。从图5可以看出，对于给定的碰撞中心度(0%~5%和70%~80%)，σ^2/M数值随能量呈指数上升趋势。无论是否考虑CBWC，最中心碰撞和边缘碰撞σ^2/M的数值都与实验数据相接近，且边缘碰撞(70%~80%)的值大于最中心碰撞(0%~5%)。对于$S\sigma$和$\kappa\sigma^2$的数值，$S\sigma$随着能量的增加而减小，$\kappa\sigma^2$的结果不依赖于能量变化。AMPT模型中对$S\sigma$和$\kappa\sigma^2$进行CBWC修正后的值都小于未做CBWC修正的值，这与研究发现的CBWC对于高阶矩影响较大的结论一致。从图5可以发现，AMPT模型的结果与实验测量结果基本一致，都没有观察到净电荷多重数分布矩积的非单调能量依赖性，也许是因为在AMPT模型中没有包括QCD临界涨落物理机制，或者是电荷涨落对临界涨落不敏感所造成的。

2.2　正负电荷关联

正如前文所述，重离子碰撞实际上是一个复杂的动力学演化过程，包括几个重要的演化阶段。因此，研究净电荷矩积的演化过程，会有助于我们理解涨落的动力学信息。因此，我们计算了$\sqrt{s_{NN}}$= 7.7 GeV和200 GeV两个能量下的AMPT模型4个演化阶段的结果。为了阐明动力学对矩或矩积的可能贡献，无任何关联的泊松基线的参考是至关重要的。为了得到净电荷分布的泊松期望矩，我们首先假设带正电粒子和带负电粒子的分布是两个独立泊

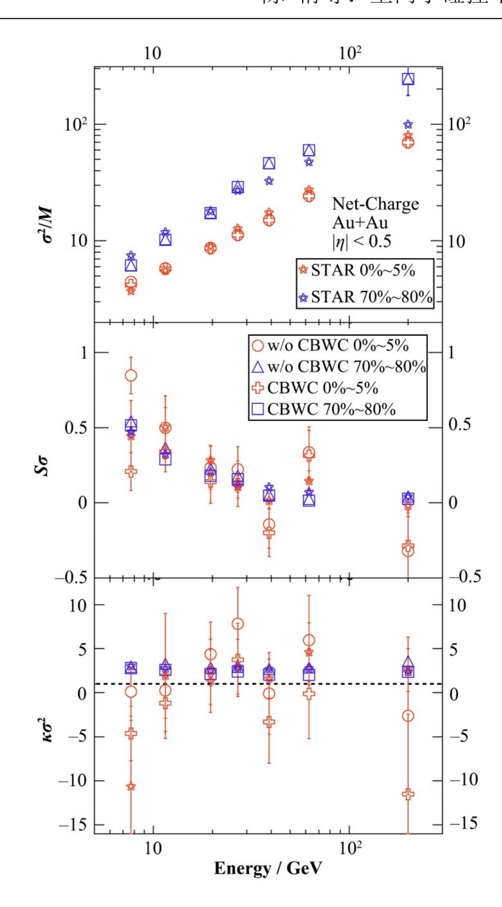


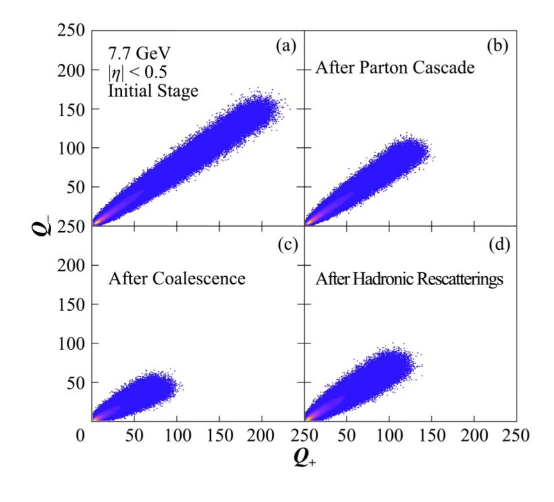
图5 矩乘积在Au+Au碰撞中最中心碰撞(0%~5%)和边缘碰撞(70%~80%)两个中心度下与碰撞能量的依赖关系[59]

Fig.5 Beam-energy dependence of moment products in most central (0%~5%) and peripheral (70%~80%) bins of Au+Au collisions, in comparison with STAR measurements[59]

松分布，并得到正、负电荷粒子的泊松期望值为$K_n^{Q_+}$和$K_n^{Q_-}$。在泊松期望情况下，净电荷的分布为两个泊松分布的组合也称为Skellam分布，其泊松期望值为$K_n^{\rm Poisson}=K_n^{Q_+}+(-1)^n K_n^{Q_-}$，这反映了带正负电荷的粒子之间没有任何关联的情况[25,90]。为了说明涨落与关联性之间的密切关系，关联强度可定义为：$\Delta K_n=K_n^{\rm Poisson}-K_n^{\rm netq}$，$K_n^{\rm Possion}$和$K_n^{\rm netq}$分别表示净电荷的泊松期望值和实际累积量，可以得到如下的关系：

$$\Delta K_2\cong 2C_2^{(1,1)}\cong 2\left(\langle Q_-Q_+\rangle-\langle Q_-\rangle\langle Q_+\rangle\right) \quad (12)$$

式中：$C_{n+m}^{(n,m)}$为n个带正电粒子和m个带负电粒子的$n+m$阶关联函数。注意：我们只关注带正电荷和负电荷粒子之间的关联性，而忽略了同号带电粒子之间的关联性，我们可以观察到净电荷矩及其泊松期望之间的差异来自于带正电荷和负电荷的粒子之间的两粒子、三粒子或四粒子的关联。本文主要围绕两粒子关联展开描述，对于三粒子和四粒子的关联更详细的描述参见文献[91]。为了直观说明带正电荷和负电荷粒子多重数之间的两粒子关联性，图6给出了AMPT模型中$\sqrt{s_{\rm NN}}$ = 7.7 GeV和200 GeV能量下Au+Au碰撞中4个不同演化阶段Q_+和Q_-的分布示意图。我们可以观察到，不同演化阶段的两粒子关联性不同，两粒子关联性的变化可能会导致相对论重离子碰撞中净电荷分布σ^2/M(式(11))的动力学演化，如图7所示。



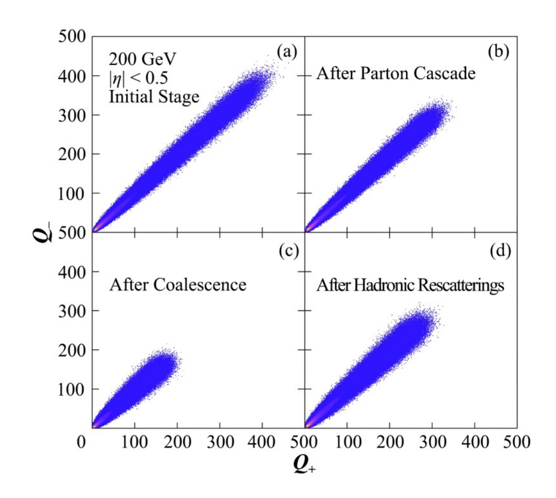


图6 在$\sqrt{s_{\rm NN}}$ = 7.7 GeV和200 GeV能量下Au+Au碰撞中不同演化阶段的正电荷Q_-和负电荷Q_+的分布示意图

Fig.6 Q_- *vs.* Q_+ at different evolution stages of Au+Au collisions (minus bias) at $\sqrt{s_{\rm NN}}$ = 7.7 GeV and 200 GeV

图7展示了$\sqrt{s_{\rm NN}}$ = 7.7 GeV和200 GeV能量下Au+Au碰撞中4个不同演化阶段σ^2/M值的中心度依赖性(这里用参与核子数$\langle N_{\rm part}\rangle$代表中心度)，其中STAR实验结果和泊松期望也一同展示进行比较。值得指出的是：实验结果是由测量的末态强子得到的，因此，只有与AMPT模型中强子再散射阶段后的结果进行比较才有意义。在Au+Au碰撞中，AMPT模型数据可以较好地描述$\sqrt{s_{\rm NN}}$ = 7.7 GeV能量的实验数据，以及$\sqrt{s_{\rm NN}}$ = 200 GeV能量中心碰撞的实验数据，但是高估了边缘碰撞的结果。从图7

可以观察到从初态到末态σ^2/M值逐渐增加。将AMPT模型结果与其泊松期望值进行比较，可以发现在4个不同演化阶段AMPT模型的结果总是低于相应的泊松期望值，这说明在正负带电粒子之间存在正关联关系，即式(12)右侧的两粒子关联函数总为正值，这意味着两个异号的带电粒子总是同时出现或者同时消失。这种差异随着演化虽然是变化的，但也说明重离子碰撞动力学演化初期就形成了正负电荷间的正关联关系，并随着演化关联逐步增强。AMPT模型中正负电荷间的正关联可能来源于：初始阶段的正关联可能源于弦熔化机制，在这个过程中，激发弦被分裂为组成它的带有不同电荷的夸克和反夸克。部分子级联过程由于部分子碰撞会改变部分子的运动学信息，因此改变了两粒子的关联强度。然而，强子化过程中的夸克组合机制会使系统的自由度发生改变，导致两粒子关联强度发生了显著的改变。可以观察到强子化后ΔK_n几乎为零，这意味着此时关联几乎消失。强子再散射阶段不仅可以通过强子再散射(类似部分子级联)来改变关联强弱，而且通过共振衰变会将一个“母”强子衰变为两个携带异号电荷的“子”强子，从而提供了额外的两粒子关联。这似乎表明实验观测到的σ^2/M值主要是通过强子再散射过程中产生的。值得一提的是，强子共振气体(Hadron Resonance Gas，HRG)模型[92]的研究结果也表明矩乘积会较大程度地受到共振态衰变的影响，在高能量碰撞下会增强σ^2/M值。AMPT模型后两个演化阶段的结果与HRG模型结果基本是一致的。然而，这种影响的程度可能是不同的，因为我们的模型不仅包括共振态衰变，还包括强子相演变过程中的强子弹性和非弹性反应。因此，未来分别研究共振衰变和强子反应道对守恒荷涨落的影响是很有意义的。

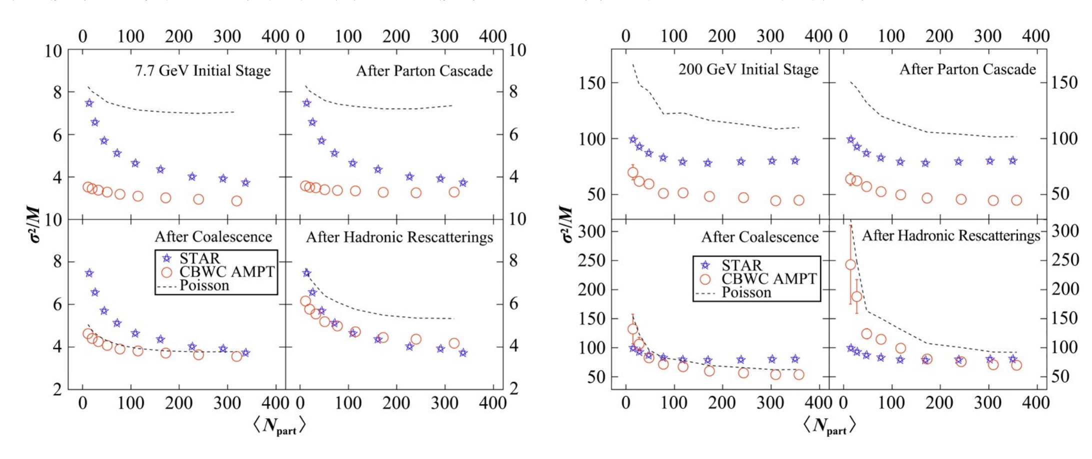


图7　在$\sqrt{s_{NN}}$ = 7.7 GeV和200 GeV能量下Au+Au碰撞中不同演化阶段的矩乘积σ^2/M随着碰撞中心度的依赖性[59]

Fig.7　Centrality dependence of moment product σ^2/M at different evolution stages of Au+Au collisions at $\sqrt{s_{NN}}$ = 7.7 GeV and 200 GeV, in comparison with STAR measurements[59]

3　净重子涨落性质

理论研究表明，净重子(净质子)多重数分布的高阶累积量对QCD相变和QCD临界点最为敏感[93−94]，STAR实验中净质子四阶累积量与二阶累积量之比($\kappa\sigma^2$)的结果呈现出非单调的能量依赖性[26,29]，这被认为可能是QCD临界点的信号。因此，我们基于AMPT模型，通过对质子和重子累积量及其关联函数的研究，探索QCD物质相结构相关问题，为寻找相对论重离子碰撞在临界点可能出现的临界行为提供基线。近来我们使用玻尔兹曼统计和量子统计提取了不同能量碰撞系统在相图中的演化路径[95]，由于接近CEP区域都有可能出现临界涨落行为，研究结果表明，可能接近临界区域的束流能量区间在5 GeV < $\sqrt{s_{NN}}$ < 20 GeV下，该分析结果预测的范围与最近STAR实验基于净质子高阶累积量比率分析预测的临界现象可能发生在3 GeV < $\sqrt{s_{NN}}$ < 20 GeV区间的结果接近[63]。因此，下面一些研究工作主要选取$\sqrt{s_{NN}}$ = 7.7 GeV能量下Au+Au碰撞进行了较全面的分析。

3.1　质子累积量(比率)中心度依赖性

STAR实验合作组最近发表了在$\sqrt{s_{NN}}$ =7.7~200 GeV能量下Au+Au碰撞的质子、反质子和净质子多重数分布的累积量和关联函数的中心度依赖关系[26]。我们利用电荷守恒版AMPT模型重点讨论了在$\sqrt{s_{NN}}$ = 7.7 GeV能量下Au+Au碰撞中质子、反质子和净质子的累积量、累积量比率、关联函数和归一化关联函数的中心度依赖性，并与STAR结果[26]进

行比较。因此，我们选择了与STAR实验[26]一样的选择条件，选取了横动量 $0.4\ \mathrm{GeV\cdot c^{-1}} < p_T < 2.0\ \mathrm{GeV\cdot c^{-1}}$ 和快度 $|y| < 0.5$ 范围内的质子和反质子来计算它们多重数分布的累积量和关联函数。采用赝快度 $|\eta| < 1$ 范围内的带电粒子多重数来定义碰撞中心度，为了避免自关联效应，划分中心度用的带电粒子需排除质子和反质子，同样采用Δ理论公式来计算统计误差[25-26]，并与前面分析电荷涨落一样采用了CBWC修正来消除体积涨落效应[91]。

图8是 $\sqrt{s_{NN}} = 7.7$ GeV能量下Au+Au碰撞中质子、反质子和净质子多重数分布的累积量 C_n(n=1、2、3、4)的 $\langle N_{part}\rangle$(中心度)依赖性。随着参与核子数 $\langle N_{part}\rangle$ 的增加，反质子的累积量 C_n 几乎为零，这反映出低能量下反质子的产额很少，因此，净质子的 C_n 主要来自于质子的贡献。质子和净质子的累积量 C_n 均表现出对 $\langle N_{part}\rangle$ 的依赖性，可以发现，AMPT模型结果基本可以描述实验数据。

图9显示了 $\sqrt{s_{NN}} = 7.7$ GeV能量下Au+Au碰撞中质子、反质子和净质子多重数分布的累积量比率[$C_2/C_1(\sigma^2/M)$、$C_3/C_2(S\sigma)$ 和 $C_4/C_2(\kappa\sigma^2)$]的 $\langle N_{part}\rangle$(中心度)依赖性，这些累积量比率可以消除可能的体积效应。在图9(a)中，AMPT模型中 σ^2/M 的结果与STAR实验的趋势一致，但其数值略小。在图9(b)中，AMPT模型质子和净质子的 $S\sigma$ 值与STAR结果一致，但AMPT模型略微高估了反质子的 $S\sigma$ 值。人们普遍认为，如果 $\kappa\sigma^2$ 存在非单调能量依赖性，则表明当系统经过靠近CEP的区域时，可能会发生临界涨落[25,86]。然而，AMPT模型中质子和净质子 $\kappa\sigma^2$ 数值在较大的误差范围内与泊松基线一致未出现非单调的行为，如图9(c)所示，可能是因为AMPT模型中不含有在CEP处的任何临界涨落机制导致的。

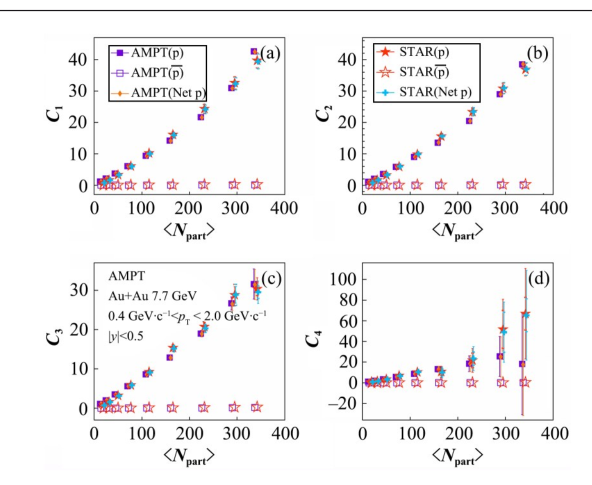


图8 $\sqrt{s_{NN}} = 7.7$ GeV能量下Au+Au碰撞中质子、反质子和净质子多重数分布的累积量 C_n 随参与核子数 $\langle N_{part}\rangle$ 的依赖性[26]

Fig.8 AMPT results on cumulants C_n of proton, antiproton, and net-proton distributions as a function of $\langle N_{part}\rangle$ in Au+Au collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 7.7$ GeV, in comparison with STAR measurements[26]

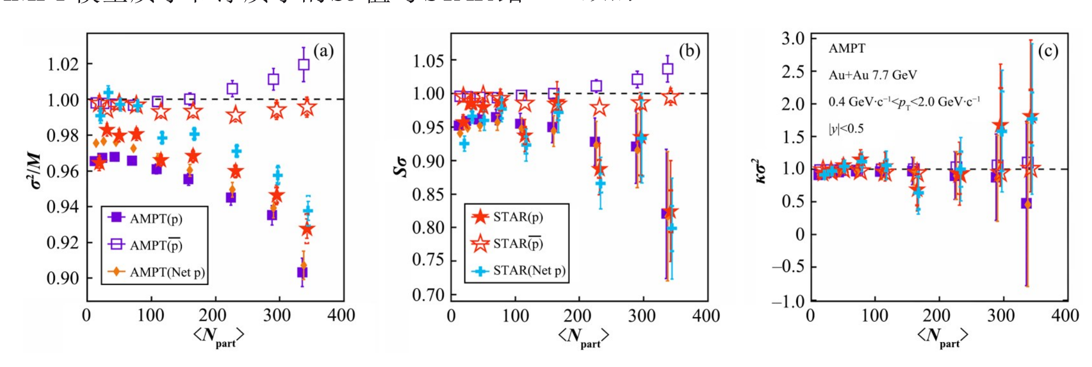


图9 $\sqrt{s_{NN}} = 7.7$ GeV能量下Au+Au碰撞中质子、反质子和净质子多重数分布的的累积量比率随参与核子数 $\langle N_{part}\rangle$ 的依赖性[26]

Fig.9 AMPT results on cumulant ratios of proton, antiproton, and net-proton distributions as a function of $\langle N_{part}\rangle$ in Au+Au collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 7.7$ GeV, in comparison with STAR measurements[26]

根据式(9)的计算，图10显示了 $\sqrt{s_{NN}}$=7.7 GeV能量下Au+Au碰撞中质子和反质子多重数分布的归一化关联函数(κ_n/κ_1)的 $\langle N_{part}\rangle$(中心度)依赖性。我们这里没有显示净质子的归一化关联函数，因为在 $\sqrt{s_{NN}} = 7.7$ GeV能量下Au+Au碰撞中反质子的产额远低于质子的产额，质子的涨落与净质子的涨落相似，这在图8和图9已被证明，质子和净质子的累积量和累积量比率基本重合，且净质子由两种粒子质子和反质子组成需要用混合关联函数方法进行计算[6,70]。从图10(a)可以观察到，AMPT模型中双质子归一化关联函数 κ_2/κ_1 的趋势与STAR实验的一致，都表现出了显著的负的双质子归一化关联函数，

且随$\langle N_{part}\rangle$的增大，双质子关联强度会增大，但AMPT模型中的双质子关联强度比实验的更强。而AMPT模型显示了略微增加的正的两反质子归一化关联函数，这似乎与实验测量显示的接近零或轻微负关联有些不一致。但我们已经验证了双反质子正关联是由我们的模型中简单的夸克组合模型[71]引起的，而在AMPT模型中使用新的夸克组合模型[84]双反质子正关联现象就会消失。在图10(b)中，AMPT模型中显示了正的三质子归一化关联函数κ_3/κ_1，并随$\langle N_{part}\rangle$而增大，但三反质子归一化关联函数接近于零，在较大误差不确定度下与实验测量结果一致。在图10(c)中，AMPT模型中质子和反质子κ_4/κ_1的值均为零。由于实验数据点也具有较大的不确定性，我们无法得出AMPT模型与实验测量值之间是否存在不一致的结论。实际上，AMPT模型中多质子关联函数的$\langle N_{part}\rangle$(中心度)依赖性是在重子数守恒下重子停止效应演化的结果，这将在§3.3讨论。

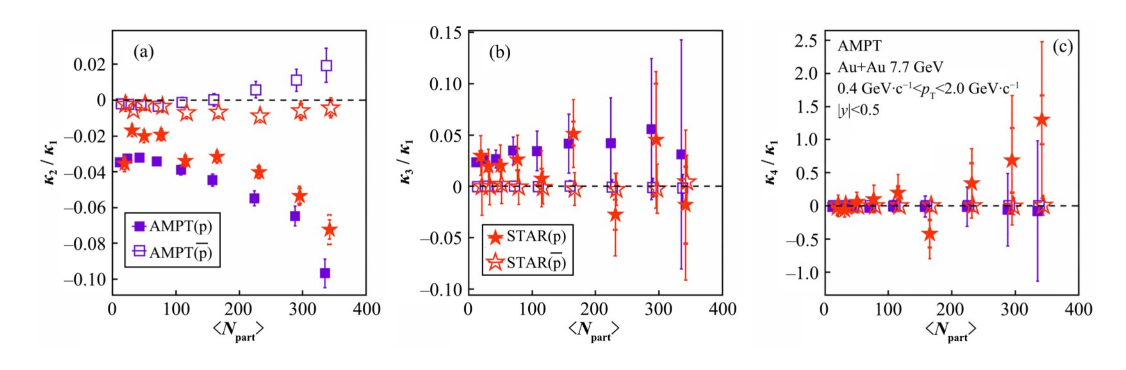


图10 $\sqrt{s_{NN}}$ = 7.7 GeV能量下Au+Au碰撞中质子和反质子多重数分布的归一化关联函数随参与核子数$\langle N_{part}\rangle$的依赖性[26]

Fig.10 AMPT results on normalized correlation functions of proton and antiproton distributions as a function of $\langle N_{part}\rangle$ in Au+Au collisions at $\sqrt{s_{NN}}$ = 7.7 GeV, in comparison with STAR measurements[26]

3.2 接受度对累积量比率及其关联函数的影响

在实验上，由于STAR探测器时间投影室(Time Projection Chamber，TPC)和飞行时间谱仪(Time of Flight，TOF)接受范围的限制，对数据进行处理分析时，为了保证粒子鉴别纯度会对接受范围进行一定的选择。文献[66，96−98]的结果表示，当快度接受范围(Δy)远小于系统的典型关联长度(ξ)，即$\Delta y \ll \xi$，则累积量(C_n)和关联函数(κ_n)与所接受快度范围内的粒子多重数分布平均值的n次幂成比例，$C_n, \kappa_n \propto (\Delta N)^n \propto (\Delta y)^n$。反之，若是快度接受范围($\Delta y$)远大于系统的典型关联长度($\xi$)时，即$\Delta y \gg \xi$，累积量($C_n$)和关联函数($\kappa_n$)与所接受快度范围内的粒子多重数分布的均值或者$\Delta y$呈线性关系。因此，本节将重点讨论$\sqrt{s_{NN}}$ = 7.7 GeV能量下Au+Au碰撞中最中心碰撞(0%~5%)质子、反质子和净质子累积量比率和关联函数对接受度依赖性，下面主要展示了快度接受范围变化对累积量比率及其归一化关联函数的影响，而关于横动量接受范围变化的影响详见文献[89]。

图11显示了$\sqrt{s_{NN}}$ = 7.7 GeV能量下Au+Au碰撞中最中心碰撞(0%~5%)质子、反质子和净质子多重数分布的累积量比率[$C_2/C_1(\sigma^2/M)$、$C_3/C_2(S\sigma)$和$C_4/C_2(\kappa\sigma^2)$]对快度接受度上限y_{max}的依赖性，所选取的粒子快度y应该满足$|y| < y_{max}$，故快度接受范围为$\Delta y = 2y_{max}$。因此，增加y_{max}实际上扩大了快度接受度范围，分析所选取的粒子横动量范围为0.4 GeV·c^{-1} < p_T < 2.0 GeV·c^{-1}。由于反质子的产额非常少，我们发现质子的累积量比率和净质子的大致相等。从图11(a)和(b)可以观察到，AMPT模型的结果与SATR实验数据的趋势一致，但AMPT模型中质子和净质子的σ^2/M值略小于实验值。图11(c)中显示，AMPT模型中质子和净质子的$\kappa\sigma^2$值呈下降趋势。根据式(9)可以知道，累积量比率与不同阶归一化关联函数κ_n/κ_1之间的相互作用有关。我们注意到AMPT模型中质子累积量比率σ^2/M、$S\sigma$和$\kappa\sigma^2$都偏离泊松基线，在接下来的分析中我们发现，这是由于受到负的两质子关联的影响而导致的。

图12显示了$\sqrt{s_{NN}}$ = 7.7 GeV能量下Au+Au碰撞中最中心碰撞(0%~5%)质子和反质子多重数分布的归一化关联函数(κ_n/κ_1)的快度接受度上限y_{max}依赖性。从图12(a)可以发现，质子归一化关联函数κ_2/κ_1的数值都为负，且随着快度接受度的增加，κ_2/κ_1单调递减。但我们观察到AMPT模型中质子

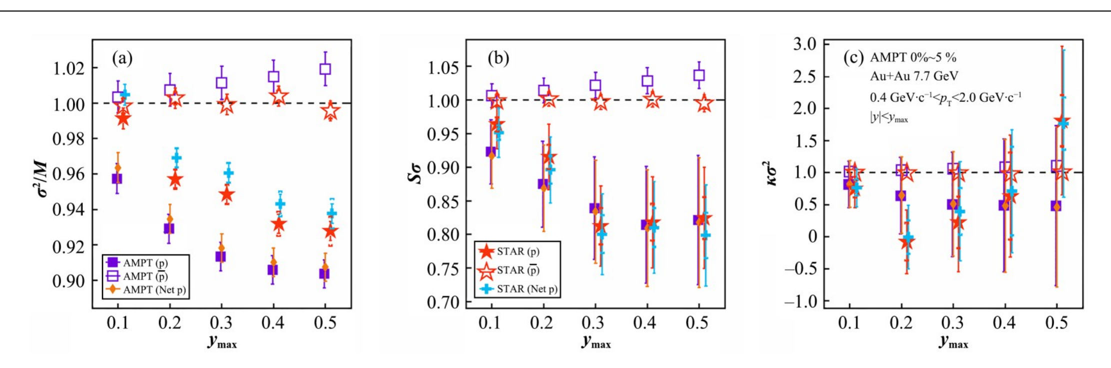


图 11 $\sqrt{s_{NN}}$ = 7.7 GeV能量下Au+Au碰撞中最中心碰撞(0%~5%)质子、反质子和净质子多重数分布的累积量比率的快度接受度上限y_{max}依赖性[26]

Fig.11 AMPT results on cumulants ratios of proton, antiproton, and net-proton distributions as a function of rapidity cut, y_{max} in 0%~5% of central Au+Au collisions at $\sqrt{s_{NN}}$ = 7.7 GeV, in comparison with STAR measurements[26]

归一化关联函数κ_2/κ_1负的关联强度比实验数据更强。图12(b)和(c)中呈现出AMPT模型中质子和反质子的κ_3/κ_1和κ_4/κ_1的数值都接近于零，不能产生明显的κ_4/κ_1的快度依赖性或者长程的四质子关联函数[66,68,97]。

3.3 涨落计算中重子与质子的关系

累积量和关联函数可能也会受到QGP火球在动态膨胀过程中的非平衡[99-101]、扩散和强子再散射[101-104]的影响。相对论重离子碰撞实际上是一个复杂的动力学演化过程，为了解涨落观测量的阶段性演化特征，有必要比较几个重要演化阶段的累积量和关联函数。另一方面，在相对论重离子碰撞中总重子数是绝对守恒的，它是由来自弹体和靶核的总核子数定义的。在AMPT模型中也满足重子数守恒。在初始状态下，由于重子停止效应重子被减速停留到中快度区。文献[6,105]提出了在重子停止效应的情况下，测量的重子数量N的分布$P(N)$可以简单地由一个二项分布给出：

$$P(N)=\frac{B!}{N!(B-N)!}p^{N}(1-p)^{(B-N)} \qquad (13)$$

式中：p为初始核子最终停留在选择接受度范围内的概率；B为总重子数，则推导出n个重子的关联函数κ_n为：

$$\kappa_1=\langle N\rangle=pB,\ \kappa_2=\frac{-\langle N\rangle^2}{B},$$
$$\kappa_3=2\frac{\langle N\rangle^3}{B^2},\ \kappa_4=-6\frac{\langle N\rangle^4}{B^3} \qquad (14)$$

式(14)表明，重子数量守恒导致了重子关联函数κ_n的正负取决于阶数$(-1)^{n+1}$，其强度正比于$\langle N\rangle^n$。由于质子不是全局守恒量，为了观察守恒荷累积量的阶段演化，因此，本节主要利用AMPT模型重点研究了$\sqrt{s_{NN}}$ = 7.7 GeV能量下Au+Au碰撞中4个不同演化阶段的重子累积量和关联函数的动力学规律，因为强子在散射阶段和弱衰变对重子涨落影响类似，为简单起见我们这里直接展示了末态，因此只包含4个演化阶段。

图13展示了$\sqrt{s_{NN}}$ = 7.7 GeV能量下Au+Au碰撞中不同演化阶段重子多重数分布累积量比率的$\langle N_{part}\rangle$(中心度)依赖性，因为重子数是由夸克组成的，所以我们计算中前两个演化阶段的夸克的重子

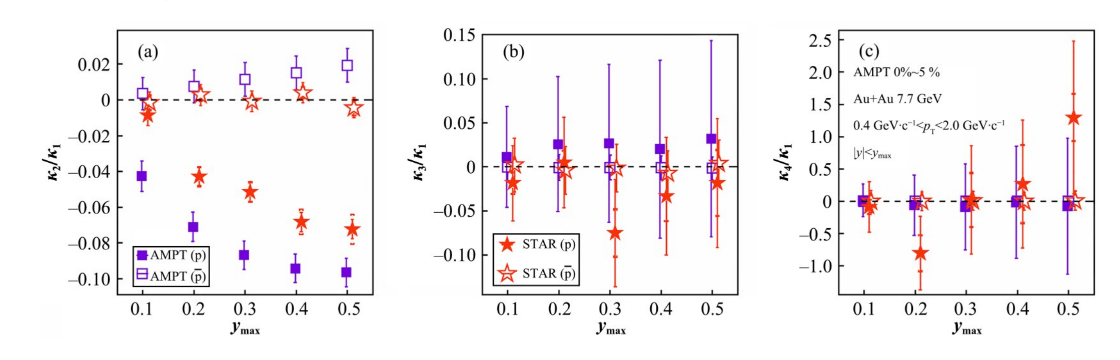


图 12 $\sqrt{s_{NN}}$ = 7.7 GeV能量下Au+Au碰撞中最中心碰撞(0%~5%)质子和反质子多重数分布的归一化关联函数的快度接受度y_{max}依赖性[26]

Fig.12 AMPT results on normalized correlation functions of proton and antiproton distributions as a function of rapidity cut, y_{max} in 0%~5% of central Au + Au collisions at $\sqrt{s_{NN}}$ = 7.7 GeV, in comparison with STAR measurements[26]

数是三分之一。观察图13可以发现，与初始阶段相比，部分子级联后的累积量比率减小，而经过强子化阶段后又增加了重子的累积量比率。然而，强子再散射阶段对重子的累积量比率影响不大。在不同演化阶段出现不同涨落现象的原因是：重子由于系统膨胀而弥散到更大的相空间导致了部分子级联后的累积量比率减小。强子化阶段增加了累积量比率，是因为夸克组合使更多重子进入了接受度范围内。而重子扩散现象在强子相中的作用较弱。如式(9)所示，如果不存在多粒子关联的情况下，三个累积量比率的泊松基线都是一致的。在4个不同的演化阶段，AMPT模型中重子的σ^2/M值始终低于泊松基线，表明在重离子碰撞过程中始终存在着负的两重子关联。对于$S\sigma$和$\kappa\sigma^2$，它们比σ^2/M的情况更复杂，因为它们既包括了两重子关联，也包括了多重子关联，有关不同阶多重子关联函数更详细的信息会在后续进行讨论。但可以肯定的是，累积量比率是随着重离子碰撞的演化而变化的。因此，必须考虑累积量比率的动力学演化效应来寻找CEP处可能的临界涨落行为。此外，我们发现在末态质子累积量比率的中心度依赖性与重子累积量比率中心度依赖性相似，只是数值大小略有不同。

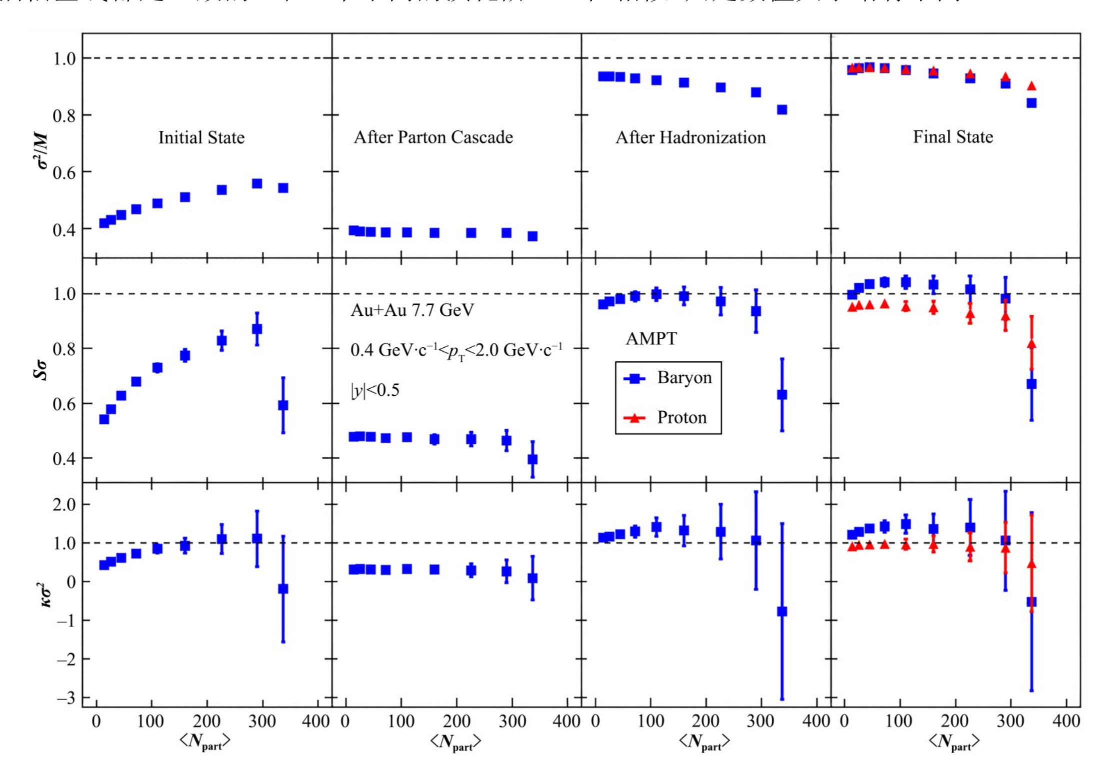


图13　$\sqrt{s_{NN}}$ = 7.7 GeV能量下Au+Au碰撞中不同演化阶段重子多重数分布的累积量比率随参与核子数$\langle N_{part}\rangle$的依赖性

Fig.13　AMPT results on cumulant ratios of baryon distributions as a function of $\langle N_{part}\rangle$ at different evolution stages in Au+Au collisions at $\sqrt{s_{NN}}$ = 7.7 GeV

多粒子关联函数比累积量比率用来分析涨落更清晰[6]。图14展示了$\sqrt{s_{NN}}$ = 7.7 GeV能量下Au+Au碰撞中不同演化阶段n重子关联函数κ_n对$\langle N_{part}\rangle$(中心度)的依赖性。在初始阶段，我们观察到负两重子关联、正三重子关联和负四重子关联，这些符号的变化与重子数守恒的期望是一致。多重子关联函数的关联强度都是随着$\langle N_{part}\rangle$而增加，这表明在越接近中心碰撞的地方，由于重子停止效应有更多的重子被减速停留到中快度区。此外，我们还观察到随着重离子碰撞的演化，多重子关联函数逐渐减弱。虽然多重子关联强度减弱，但表明了在重离子碰撞的演化过程中关联一直存在。我们观察到多质子关联函数与多重子关联函数在趋势上相似，但其关联强度较弱一些，这表明在测量多重子关联函数时，质子可以在一定程度上可以被认为是重子的代表。

根据文献[106–109]提出，多重子关联函数与多质子关联函数有这样的关系：$\kappa_n^B = \kappa_n^p/q^n$，其中$q$为有效接受因子，表示在有限的接受度和效率范围内测量到的质子占重子比。如果$\langle N^B\rangle = \langle N^p\rangle/q$，这一关系也与重子数守恒期望一致，如式(14)所示。通过计算多质子关联函数和多重子关联函数比值的n次幂可以提取出有效接受因子q，即$\sqrt[n]{\kappa_n^p/\kappa_n^B}$。图15展

示了 $\sqrt{s_{NN}}$ = 7.7 GeV 能量下 Au+Au 碰撞中有效接受因子 $\sqrt[n]{\kappa_n^p/\kappa_n^B}$ 的 $\langle N_{part}\rangle$（中心度）依赖性。我们发现有效接受因子几乎与中心度无关，通过拟合为一常数约为0.475，与文献[107–108]所提的1/2略有不同。从图13和图14可以看出，在AMPT模型中多重子关联函数与多质子关联函数应该是来自相同的源，即重子数守恒。有效接受因子可以反映出在重子数守恒中质子能多大程度上代表重子。然而，如果有来自其他更多的贡献源，尤其是临界涨落，重子数和质子数涨落之间的关系可能会更加复杂，需要进一步研究。

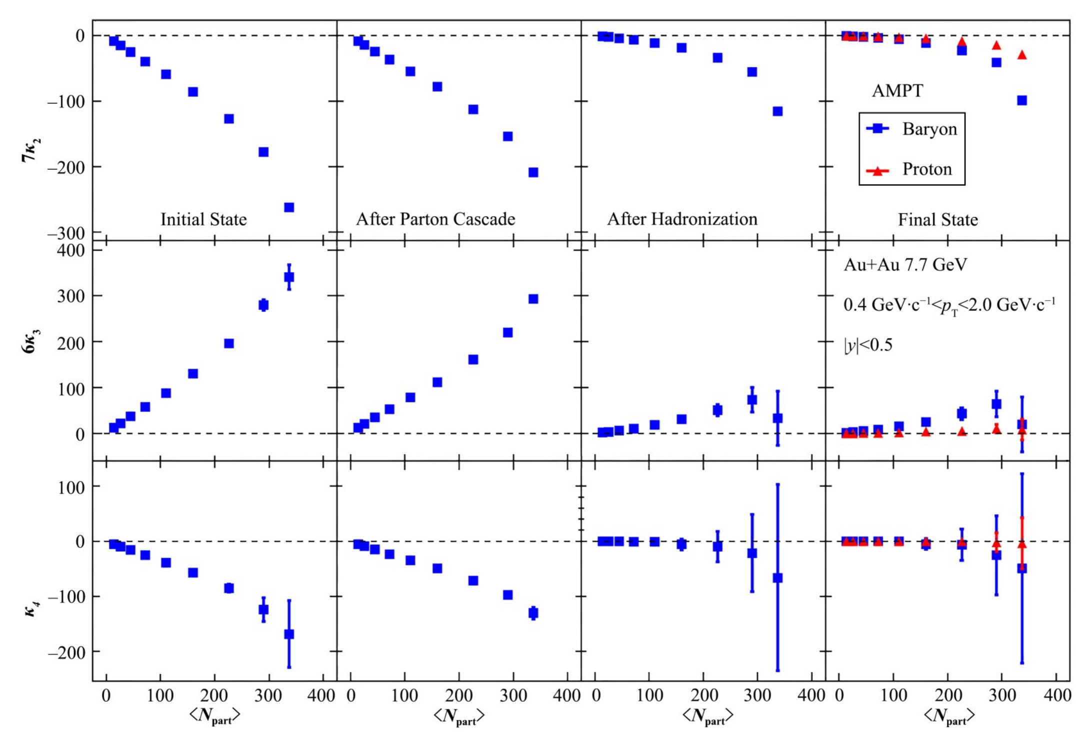


图14 $\sqrt{s_{NN}}$ = 7.7 GeV 能量下 Au+Au 碰撞中不同演化阶段 n 重子关联函数 κ_n 随参与核子 $\langle N_{part}\rangle$ 的依赖性

Fig.14 AMPT results on correlation functions of baryons as a function of $\langle N_{part}\rangle$ at different evolution stages in Au+Au collisions at $\sqrt{s_{NN}}$ = 7.7 GeV

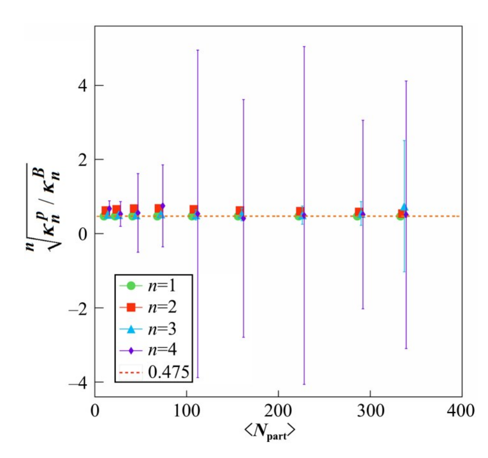


图15 $\sqrt{s_{NN}}$ = 7.7 GeV 能量下 Au+Au 碰撞中有效接受因子随参与核子 $\langle N_{part}\rangle$ 的依赖性

Fig.15 AMPT results on the acceptance factor as a function of $\langle N_{part}\rangle$ in Au+Au collisions at $\sqrt{s_{NN}}$ = 7.7 GeV

4 净奇异数涨落性质

由于重离子碰撞中的弹核和靶核中没有携带奇异数，末态奇异强子的产生可以提供一种独特的方法去理解产生系统的特性。例如，曾预测在QGP中会产生大量奇异夸克，则会导致奇异强子的增强，这是QGP信号产生的显著特征之一[110]。另一著名的实验信号是在铅铅（Pb+Pb）中心碰撞中，K^+/π^+ 比率的能量依赖性图中观察到在30A GeV能量时有一个峰值出现[111]，这被认为可能是QCD物质退禁闭的开始。在高能A+A碰撞中产生的奇异重子，当按参与的核子数量比例缩小时，而相对于在p+p反应中测量到的奇异重子结果会增强，这是因为QGP存在的情况下含多个奇异夸克的粒子的产额增强[112]。不同类型的强子产额和涨落可以揭示重离子碰撞中化学冻结相关的信息。实验数据分析表明，轻强子（只含u、d夸克）似乎比奇异强子（含s夸克）的化学冻结温度更低[8,113–114]。还有其他结果表明，奇异夸克平滑交叉相变区域退禁闭的温度可能发生在大于临界温度 T_c 的位置[115–117]。奇异数的涨落也引起了许多

理论物理学家的注意[118−128]，这被认为是反映QCD相变的一个奇特探针。

4.1 中心度依赖性

2018年，STAR实验合作组首次测量了Au+Au碰撞中净K介子多重数分布的矩[129]，但在实验不确定性范围内，其能量依赖性函数没有观察到非单调行为。AMPT模型的研究[130−131]能给出合理的化学冻结温度，与实验测量值一致。在这里使用具有新的夸克组合机制和遵守电荷守恒定律的AMPT模型来分析奇异数涨落问题，本节重点讨论了在$\sqrt{s_{\rm NN}}$ = 7.7 GeV能量下Au+Au碰撞中奇异粒子的累积量、累积量比率和关联函数。为了对比分析，我们选择了与STAR实验组[129]一样的选择条件。我们选择了横动量0.2 GeV·c^{-1} < $p_{\rm T}$ < 1.6 GeV·c^{-1}和快度$|y|$< 0.5范围内的K^+和K^-进行物理分析，同时选取了赝快度$|\eta|$< 1范围内的带电粒子多重数来定义碰撞中心度。为了避免自关联效应，划分中心度用的带电粒子需要排除K^+和K^-两种介子，并采用了CBWC来分析数据以消除体积涨落效应，这里采用了bootstrap方法计算统计误差[25]。

图16显示了$\sqrt{s_{\rm NN}}$ = 7.7 GeV能量下Au+Au碰撞中净K介子(ΔN_K)多重数分布的累积量C_n的$\langle N_{\rm part}\rangle$(中心度)依赖性。净$K$介子($\Delta N_K$)的累积量$C_n$从边缘碰撞到中心碰撞单调增加，可以发现，AMPT模型的结果都略小于实验数据。假设K^+和K^-的多重数分布是独立的泊松分布，则可以得到相应净K介子(ΔN_K)泊松期望值：$C_n^{\rm Poisson} = C_n^{K^+} + (-1)^n C_n^{K^-}$，如图16中虚线所示。在统计误差不确定度范围内，所有累积量C_n的值似乎都与AMPT模型的泊松期望值一致。然而，如果仔细观察图16(b)，可以发现AMPT模型中C_2的结果略低于其泊松基线，这表明K^+和K^-之间存在着关联，这将在后面讨论。

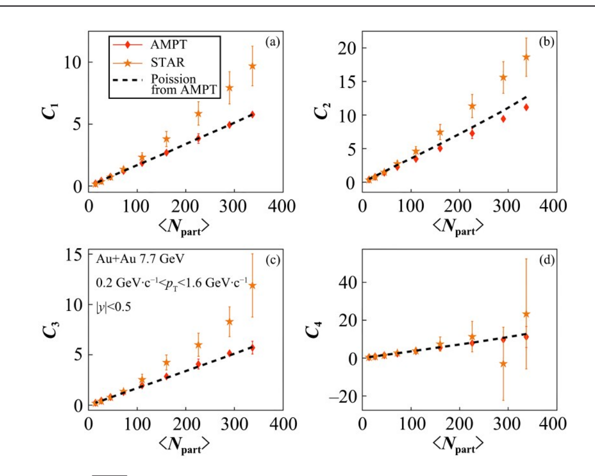
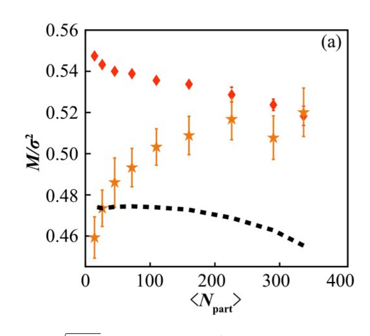
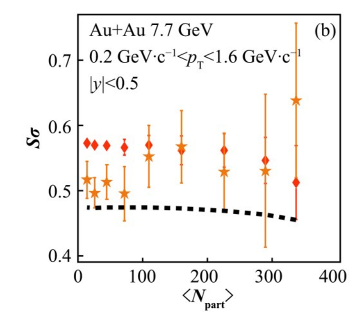


图16 $\sqrt{s_{\rm NN}}$ = 7.7 GeV能量下Au+Au碰撞中净K介子多重数分布的累积量C_n随参与核子数$\langle N_{\rm part}\rangle$的依赖性[129]

Fig.16 AMPT results on cumulants C_n of net-kaon multiplicity distributions as a function of $\langle N_{\rm part}\rangle$ in Au+Au collisions at $\sqrt{s_{\rm NN}}$ = 7.7 GeV, in comparison with STAR measurements[129]

图17显示了$\sqrt{s_{\rm NN}}$ = 7.7 GeV能量下Au+Au碰撞中净K介子(ΔN_K)多重数分布的累积量比率[$C_1/C_2(M/\sigma^2)$、$C_3/C_2(S\sigma)$和$C_4/C_2(\kappa\sigma^2)$]的$\langle N_{\rm part}\rangle$(中心度)依赖性，AMPT模型的泊松期望值用虚线表示。从图17(a)可以观察到，AMPT模型中的M/σ^2值可以描述STAR实验数据中接近中心碰撞几个中心度，但高估了边缘碰撞中STAR的值，因此整体趋势与实验数据趋势不一致，AMPT模型的结果也大于其泊松基线。通过比较分别含有新和旧夸克组合机制的电荷守恒版AMPT模型的结果发现，这是由于新的夸克组合机制导致的。在图17(b)中，在误差允许范围内，AMPT模型中净K介子的$S\sigma$值与非边缘碰撞的实验数据结果一致，大于其泊松基线。AMPT模型中净K介子的$\kappa\sigma^2$值在较大误差允许范围内与实验数据及其泊松基线一致，如图17(c)所示。净K介子的矩积与泊松基线之间的这些差异表明，净K介子的多重数分布不是一个简单的随机或独立分布，净K介子之间一定存在某种关联性。





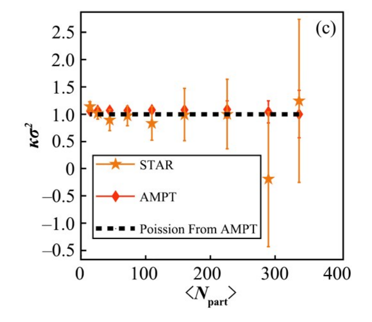


图17 $\sqrt{s_{\rm NN}}$ = 7.7 GeV能量下Au+Au碰撞中净K介子多重数分布的累积量比率随参与核子数$\langle N_{\rm part}\rangle$的依赖性[129]

Fig.17 AMPT results on cumulant ratio of net-kaon multiplicity distributions as a function of $\langle N_{\rm part}\rangle$ in Au+Au collisions at $\sqrt{s_{\rm NN}}$ = 7.7 GeV, in comparison with STAR measurements[129]

根据式(10)的计算，图18显示了$\sqrt{s_{\rm NN}}$=7.7 GeV能量下Au+Au碰撞中K^+和K^-的多重数分布的关联函数的$\langle N_{\rm part}\rangle$(中心度)依赖性。在图18(a)中，我们观察到$K^+$和$K^-$的三种两粒子关联函数都是正的。异号电荷间($K^+$和$K^-$)两粒子关联函数($\kappa_2^{(1,1)}$)的关联强度大于同号电荷间两粒子关联函数($\kappa_n^{(2,0)}$和$\kappa_n^{(0,2)}$)。经过检查新、旧夸克组合模型的数据发现，AMPT模型中M/σ^2的$\langle N_{\rm part}\rangle$依赖性与实验结果呈相反趋势可能是由于边缘碰撞中$\kappa_2^{(1,1)}$的斜率(增长率)太大导致的。可能的解决方案是在具有新夸克组合机制的AMPT模型中引入具有中心度依赖性关系的$\kappa_2^{(1,1)}$。为了实现这一点，可以参考文献[132]中的方法，在新的夸克组合机制中引入了$\gamma_{\Lambda,\Xi,\Omega}$参数来控制这些粒子的产额。同样，这里也可以引入参数γ_{K^+}和γ_{K^-}来使K^+和K^-的关联强度减弱，然后得到所需的具有中心度依赖性关系的$\kappa_2^{(1,1)}$。我们希望把它作为我们未来的研究对象之一。这表明奇异性的主要来源很可能是对产生机制，这将在下面详细讨论。然而，K^+和K^-三粒子和四粒子的关联函数在目前统计不确定度范围内与零一致。

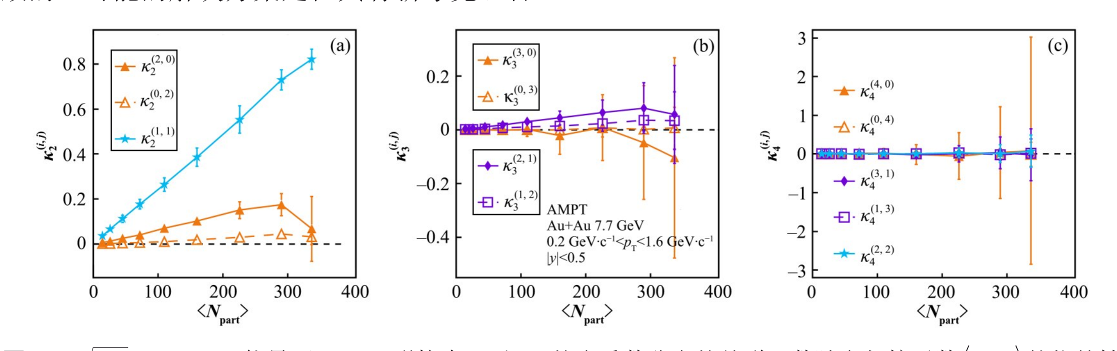


图18 $\sqrt{s_{\rm NN}}$ = 7.7 GeV能量下Au+Au碰撞中K^+和K^-的多重数分布的关联函数随参与核子数$\langle N_{\rm part}\rangle$的依赖性

Fig.18 AMPT results on correlation functions of K^+ and K^- as a function of $\langle N_{\rm part}\rangle$ in Au+Au collisions at $\sqrt{s_{\rm NN}}$ = 7.7 GeV

4.2 涨落计算中奇异强子与*K*介子的关系

相对论重离子碰撞过程中由于守恒量不是净K介子而是净奇异强子数，本节我们将重点讨论净奇异强子的累积量和关联函数的动力学演化过程。对于奇异数的计算，$N^{\rm nets} = N^{\bar{s}} - N^{s}$，$N^{\bar{s}}$和$N^{s}$表示逐事件中$\bar{s}$和s夸克的数量，而$\bar{s}$和s夸克所携带的奇异量子数分别为+1和−1。不同的奇异强子携带不同数量的(反)奇异夸克，例如：Σ、Ξ和Ω分别由1、2和3个奇异夸克组成。逐事件中奇异夸克的数量可以表示为：$N^s = \sum_i n_i^s p_i^s$，n_i^s表示每个奇异强子携带s夸克的个数，p_i^s表示奇异强子的个数。反之，逐事件中反奇异夸克的数量为：$N^{\bar{s}} = \sum_i n_i^{\bar{s}} p_i^{\bar{s}}$。为了计算最后三个强子演化阶段的净奇异数多重数分布的累积量，我们计算了奇异强子(K^+、K^0、$\bar{\Lambda}$、$\bar{\Sigma}$、$\bar{\Xi}$和$\bar{\Omega}$)及其反粒子内部组成成分s和$\bar{s}$夸克的数量，这与文献[133]中的第4种情况类似。在演化过程中，奇异夸克会不断地产生和扩散并逐事件涨落，此外，我们还试图理解在相对论重离子碰撞过程中，净K介子可以在多大程度上代表净奇异数的涨落。

图19显示了$\sqrt{s_{\rm NN}}$ = 7.7 GeV能量下Au+Au碰撞中5个不同演化阶段(从左到右)的净奇异数多重数分布的累积量C_n的$\langle N_{\rm part}\rangle$(中心度)依赖性。首先，在这里我们先关注$C_1$，如式(11)所示，对于$C_n$($n$=2、3和4)，它们包含了来自多粒子关联函数的复杂贡献，稍后将用图20进行详细讨论。接下来，我们暂且只关注前4列而忽略最后一列，因为前4个演化阶段严格遵循奇异数守恒定律，而最后一个演化阶段包含了弱衰变而破坏了奇异数守恒定律。从"初态"到"强子再散射"阶段，可以观察到净奇异数的一阶累积量C_1趋近于零，这因为初态参与碰撞的核子没有奇异强子，总的净奇异数应为零。然而，由于我们只关注中间快度窗口和做了横向动量选择，这导致一阶累积量C_1有一些偏离零。另一方面，净K介子的一阶累积量C_1显然是正的，因为奇异强子不仅包括K介子，还包括其他奇异强子，如许多奇异重子。对于最后一列中的末态(经历弱衰变)，我们发现净奇异数的均值C_1相对于强子再散射阶段的结果明显增大。这可以通过下面的例子来理解，如：对于$\Lambda \to \pi^- + {\rm p}$反应道，弱衰变前$\Lambda$携带s夸克，但经过弱衰变后的不再有含有s夸克的粒子。此外，在低能下奇异重子的产额比反奇异重子的产额大。因此，s夸克的减少量应该大于$\bar{s}$夸克，则经历弱衰变后净奇异数有所增加。然而，我们发现净K介子的累积量C_n在最后三个演化阶段保持不变，这表明强子再散射和共振衰变两个演化阶段对净K介子的涨落影响不大，文献[69]观察到净K介子多重分布的

累积比率在最后三个阶段也基本保持不变。在末态，净K介子的结果显示出与净奇异数的结果有相似的趋势，但在数值上略有不同。因此可以得出结论，即使数量大小略有不同，但净K介子的涨落在一定程度上可以代表净奇异数的涨落。在格点QCD理论[49]和有效QCD模型[134–135]也曾有预测利用净K介子的涨落来寻找可能的净奇异数QCD临界涨落是一种很好的方法。

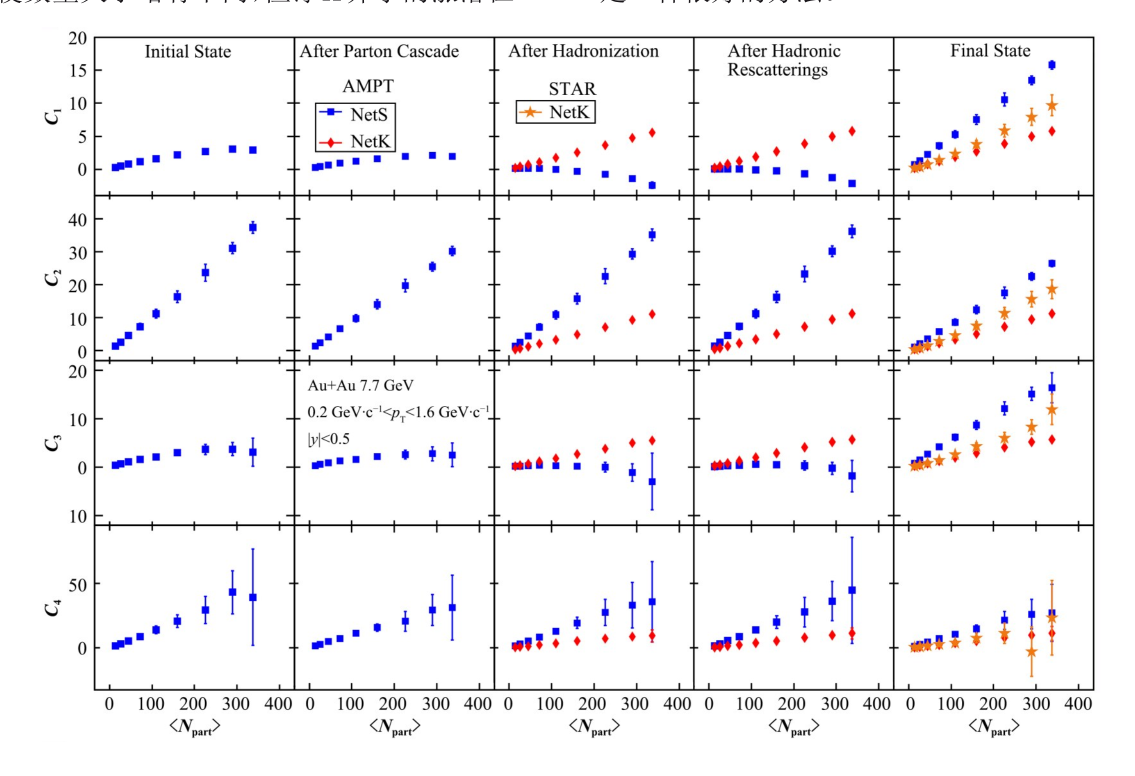


图19 $\sqrt{s_{\mathrm{NN}}}$ = 7.7 GeV能量下Au+Au碰撞中不同演化阶段净奇异数或净K介子多重数分布的累积量C_n随参与核子数$\langle N_{\mathrm{part}}\rangle$的依赖性

Fig.19 AMPT results on cumulants C_n of net-strangeness or net-kaon multiplicity distributions as a function of $\langle N_{\mathrm{part}}\rangle$ at different evolution stages in Au+Au collisions at $\sqrt{s_{\mathrm{NN}}}$ = 7.7 GeV, in comparison with STAR measurements

为了进一步理解净奇异数累积量不同演化阶段的物理机制，图20展示了$\sqrt{s_{\mathrm{NN}}}$ = 7.7 GeV能量下Au+Au碰撞在5个不同演化阶段中n粒子(j个s组分夸克和i个$\bar{s}$组分夸克)关联函数$\kappa_n^{(i,j)}$的$\langle N_{\mathrm{part}}\rangle$(中心度)依赖性。这里最上面一行的图实际上显示了s和$\bar{s}$组分夸克在不同演化阶段的均值，因为$\kappa_1^{(1,0)}=\langle N^{\bar{s}}\rangle$和$\kappa_1^{(0,1)}=\langle N^{s}\rangle$。在我们有限的统计量中可以观察到，在重离子碰撞的演化过程中，三粒子和四粒子的关联函数基本都等于零。接下来，我们将只关注单粒子产额和两粒子关联函数。对于初态，我们观察到s和$\bar{s}$组分夸克数量非常接近。图中的两粒子关联函数$\kappa_n^{(2,0)}$、$\kappa_n^{(0,2)}$和$\kappa_2^{(1,1)}$的值都为正，但是s和$\bar{s}$组分夸克之间的两粒子混合关联函数($\kappa_2^{(1,1)}$)占主导地位，这表明由于奇异数守恒定律s和$\bar{s}$组分夸克是成对产生的。在AMPT模型中，同种奇异夸克的两粒子关联函数[$\kappa_2^{(2,0)}$和$\kappa_2^{(0,2)}$]的微弱信号可以认为是在弦熔化机制下多奇异重子母粒子熔化的结果。这里值得注意的是，奇异数两粒子关联函数的符号与上文中重子是不同的[89]，因为奇异数是新产生的，而重子数是由于重子停止效应导致的。在部分子级联之后，可以发现s和$\bar{s}$夸克的均值减少，两粒子关联强度减弱，这是由于在部分子演化过程中奇异数扩散造成的。这与我们之前在研究净重子涨落时[89]的情况类似，该过程中重子数的扩散也削弱了火球膨胀过程中的两重子关联。由于强子化阶段将夸克转化为强子，并且形成奇异强子的动力学与组分奇异夸克的动力学不同，因此，在接受度范围内奇异数产额和两粒子关联函数都有一定的增强。经过强子再散射阶段，奇异数产额和两粒子关联函数也有略微增加，因为有些反应不仅可以产生两个带有s和$\bar{s}$夸克的奇异介子，还可以产生一个带有两个s夸克的奇异重子。例如，i)在反应道$\pi^0+\pi^0\rightarrow K^++K^-$中，$K^+$和$K^-$分别携带s和$\bar{s}$夸克，它们的产生和湮灭将不可避免地使$\kappa_2^{(1,1)}$发生变化；ii)在反应道$\Lambda^0+K^-\rightarrow\Xi^-+\pi^0$中，因为$\Xi^-$含有两个s夸克，那么$\Xi^-$的产生和湮灭将使$\kappa_2^{(0,2)}$发生改变。对于末态，s夸克的数量减少是因为奇异重子的衰变破坏了奇异性，两

粒子关联函数都减弱，特别是$\kappa_2^{(1,1)}$。因此，这些不同的多粒子关联函数演化阶段结果共同促成了图19中奇异数累积量的演化结果，如式(11)所示的。通过比较图18和图20可知，在末态下，K介子关联函数的中心度依赖性与奇异数关联函数的中心性依赖性具有相似的趋势，这也说明净K介子的涨落可以较好地代表净奇异数的涨落。

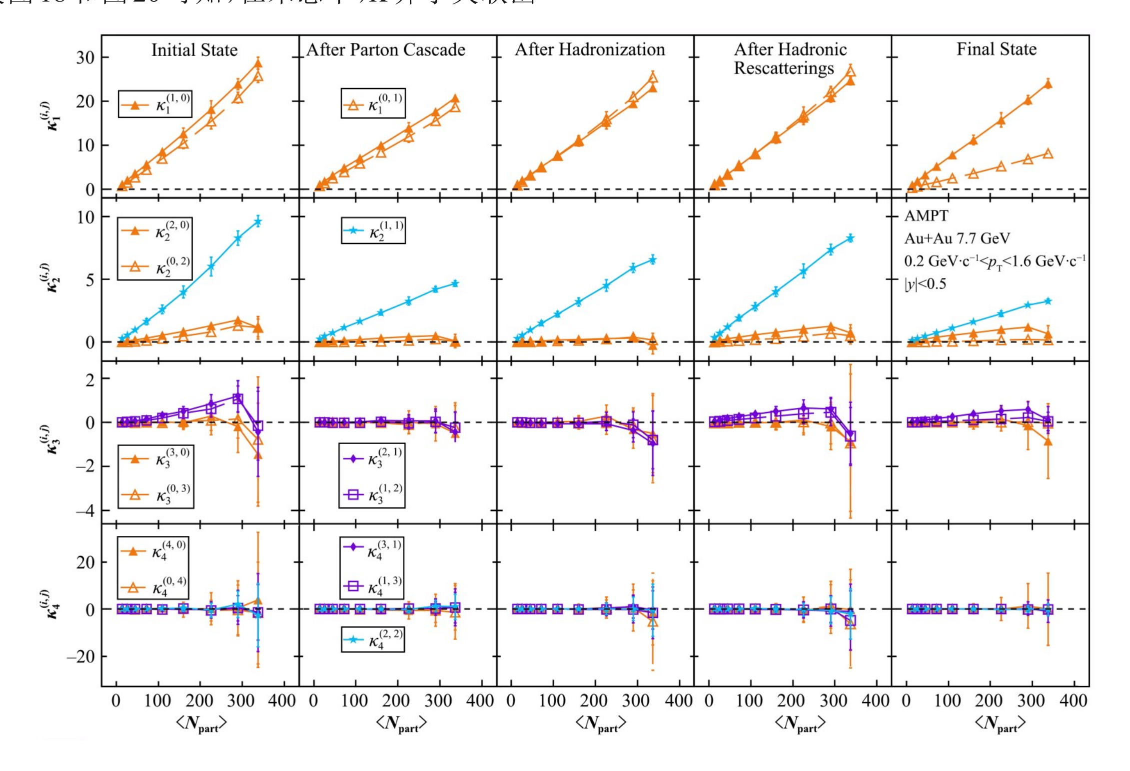


图20 $\sqrt{s_{\rm NN}}$ = 7.7 GeV能量下Au+Au碰撞在不同演化阶段中n粒子(j个s组分夸克和i个$\bar{\rm s}$组分夸克)关联函数随参与核子数$\langle N_{\rm part}\rangle$的依赖性

Fig.20 AMPT results on n-particle correlation functions of $\kappa_n^{(i,j)}$ s (constitutive) quarks and $\bar{\rm s}$ (constitutive) quarks as a function of $\langle N_{\rm part}\rangle$ at different evolution stages in Au+Au collisions at $\sqrt{s_{\rm NN}}$ = 7.7 GeV

5 引入密度涨落对QCD相变的研究

上文提到当重离子碰撞系统经过QCD临界点时，关联长度ξ是发散的。在实际系统中，关联长度ξ值的大小会受系统尺寸的限制，那么在重离子碰撞产生的火球中，其部分子的相空间可能会产生部分子团簇或者空位现象。我们对临界涨落造成的密度涨落现象进行了一些初步探索。为了探索该现象的影响，对AMPT模型(版本v1.26t5/v2.26t5)进行了扩展，引入了增强的局域部分子密度涨落(Enhanced Local parton Density Fluctuation，ELDF)，其中考虑了重子数、电荷数和奇异数守恒。具体做法如下，假设强子化之前的部分子物质在横向平面上是由许多团簇组成的，而每个团簇的中心位置由每个事件中冻结部分子密度的局部最大值决定，团簇的数量和大小为自由参数。在研究中，每个团簇的横向半径设置为1 fm，团簇的数量从2、3、4和5中随机选择。为了产生团簇，我们将团簇区域之外的每个部分子移动到其距离最近的团簇内部的一个随机横向位置，而部分子的纵向坐标和动量没有改变[136–137]。

5.1 密度涨落对高阶矩的影响

图21展示了AMPT模型中引入部分子密度涨落，部分子进行强子化之后强子在横向平面的空间分布。可以发现，在AMPT模型中，经过强子化阶段，引入的部分子相空间密度涨落仍然保留在初始强子中。尽管每个事件都有特定数量的团簇，但一个大的事件样本由具有不同数量团簇的事件组成，即在强子的坐标空间中某些位置形成了团簇或者空位。我们利用式(9)计算了累积量比率，分析了$\sqrt{s_{\rm NN}}$ = 7.7 GeV、11.5 GeV和19.6 GeV能量下Au+Au碰撞中引入的局域部分子密度涨落对累积量比率的影响。

对于净重子数涨落的计算，选取了横动量0.2 GeV·c^{-1} < $p_{\rm T}$ < 0.8 GeV·c^{-1}和快度$|y|$ < 0.5范围内的质子(重子)来计算净质子(重子)多重数分布

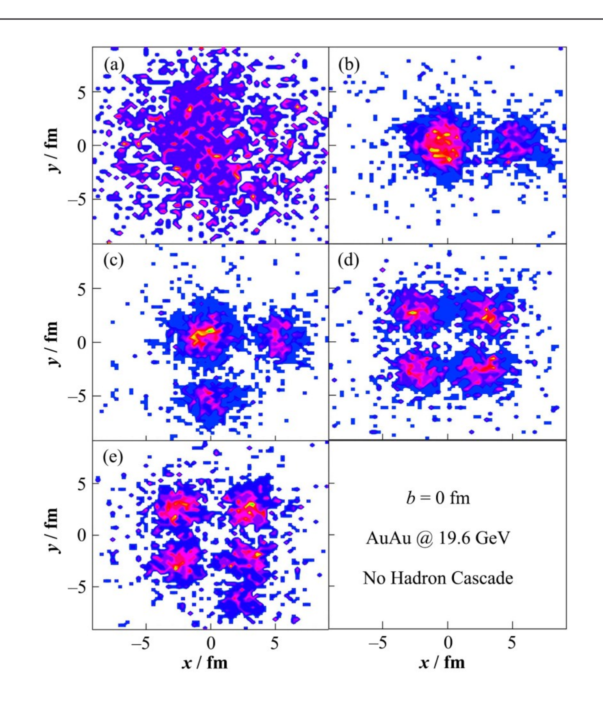
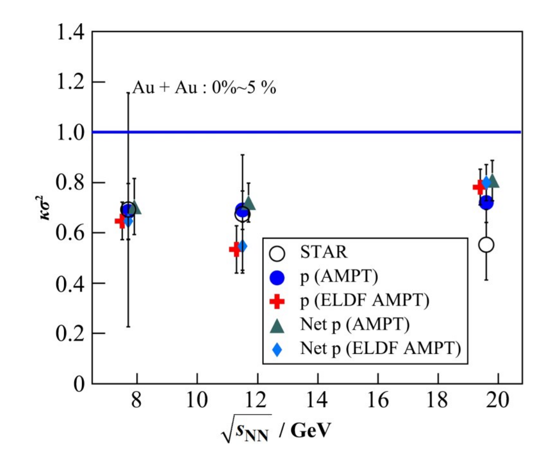


图21 在AMPT模型中引入部分子密度涨落之后，部分子进行完强子化之后强子在横向平面的空间分布

Fig.21 Coordinate distribution of hadrons in the transverse plane after introducing parton density fluctuation into the AMPT model

的累积量比率，与该实验结果[138]运用相同的选择条件，统计误差使用Δ定理[25,85]来估计。图22显示了质子、净质子、净核子和净重子在Au+Au最中心碰撞(0%~5%)$\kappa\sigma^2$的能量依赖性，并将AMPT、ELDF AMPT模型的结果与STAR实验数据进行比较。对于质子和净质子的结果(图22(a))，AMPT模型的计算结果显示出较弱的能量依赖性，可以发现ELDF AMPT模型的计算结果尽管已经包含了局域部分子密度涨落的影响，但与原始AMPT模型的计算结果相差甚小，在误差允许范围内都能描述实验数据。但是当中子和所有其他重子也被考虑在内时(图22(b))，可以观察到这些其他重子对$\kappa\sigma^2$的值有较大的影响，尤其在较低能量时。

我们还通过关闭AMPT模型中的强子相互作用阶段进一步研究其对涨落的影响，如图23所示。对比图22和图23(a)，可以观察到在$\sqrt{s_{\rm NN}}$ = 7.7 GeV能量下，强子间相互作用对质子和净质子高阶矩有较大的影响，而对$\sqrt{s_{\rm NN}}$ = 11.5 GeV和19.6 GeV能量下的$\kappa\sigma^2$值影响较小。图23(b)净重子和净核子的高阶矩分析中也发现了类似的特征，强子间相互作用具有重要的影响，特别是在较低的碰撞能量下。我们的结果与其他模型一致，如QvdWHRG (Quantum van der Waals-HRG)模型的计算结果[139]。



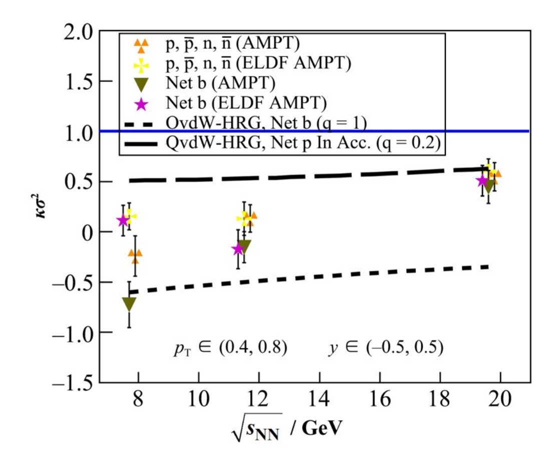


图22 在Au+Au最中心碰撞(0%~5%)，质子、净质子、净核子和净重子累积量比率的能量依赖性

Fig.22 Energy dependence of high-moment ratios of proton, net-proton, net-nucleon and net-baryon in central Au+Au collisions at $\sqrt{s_{\rm NN}}$ = 7.7 GeV, 11.5 GeV and 19.6 GeV from the original AMPT and ELDF AMPT models

5.2 密度涨落对奇异强子产额比的影响

在QCD相变的临界点附近，由于关联长度急剧增加，理论上预测重子密度涨落也会增强[140]。近年来流体力学方法[141−143]和微观输运模型[144−145]的研究表明，从QGP到强子物质的相变，引起的Spinodal不稳定性或一阶相变会引起重子密度涨落变大。这种密度涨落会一直保留到末态冻出阶段，从而引起核子密度涨落，因此在相对论重离子碰撞中重子密度涨落可以作为探针来研究QCD相变。文献[22]中展示了通过研究相对论重离子碰撞的中子密度涨落($\Delta n = \left\langle (\delta n)^2 \right\rangle / \left\langle n \right\rangle^2$)来构建核子产额比，即通过质子、氘核、氚核的产额获得该物理量：$O_{\rm p\text{-}d\text{-}t} = N_{\rm 3H} N_{\rm p} / N_{\rm d}^2$。在SPS(Super Proton Synchrotron)能区的结果显示核子产额比有非单调的能量依赖性，RHIC能区STAR实验组也在其能量扫描范围内计

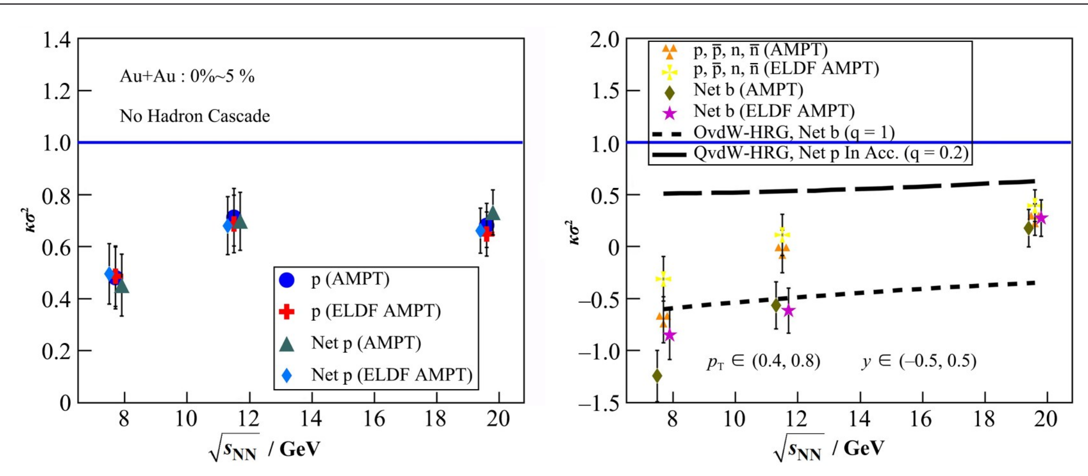


图23 Au+Au最中心碰撞(0%~5%)，关闭了AMPT模型中强子间相互作用阶段情况下，质子、净质子、净核子和净重子累积量比率的能量依赖性

Fig.23 Energy dependence of high-moment ratios of proton, net-proton, net-nucleon, and net-baryon in central Au+Au collisions at $\sqrt{s_{NN}}$ = 7.7 GeV, 11.5 GeV and 19.6 GeV from the original AMPT (with hadronic cascade stage turning off) and ELDF AMPT models

算了核子产额比，同样显示有非单调的能量依赖性的迹象。而没有临界物理机制的JAM(Jet AA Microscopic transport model)模拟结果显示出对能量变化没有依赖性，无法描述实验数据，该差异的存在说明在不同碰撞能量下应该存在中子密度的涨落变化。由于中子的产额的确定是在运动学冻出之后，会很大程度受到强子再散射阶段的影响，因此使用中子密度涨落来研究可能无法直接反应QCD相变的信息。

受文献[146]的启发，我们提出了通过计算重离子碰撞中的奇异强子产额来研究s夸克涨落，即通过K^+、Ξ^-、ϕ和Λ的产额计算该物理量[24]：$O_{K-\Xi-\phi-\Lambda} = N_{K^+}N_{\Xi^-}/N_\phi N_\Lambda$，使用了文献[147]的合并模型COAL-SH(Coalescence-ShangHai)来进行研究。在一般的夸克合并模型中是假设夸克均匀地分布在相空间，那么夸克密度就为定值，则夸克的产额为$N_q = V_c n_q$。在此工作中假设夸克密度会受到QGP相变的影响而发生涨落现象，主要是在夸克密度项(n_q)考虑夸克相空间位置的涨落：

$$n_q(\vec{r}) = \frac{1}{V_c}\int n_q(\vec{r})\mathrm{d}\vec{r} + \delta n_q(\vec{r}) = \langle q\rangle + \delta q(\vec{r}) \quad (15)$$

式中：$\langle q\rangle$表示夸克q的密度相对于坐标空间的均值，则$\delta q(\vec{r})$表示位置上夸克q的密度对于均值的偏离，有$\langle \delta q\rangle = 0$。夸克相对密度涨落项定义为：$\Delta q = \langle(\delta q)^2\rangle/\langle q\rangle^2$，那么可以得到夸克密度涨落之间的关联项为：$\alpha_{q_1q_2} = \langle\delta q_1\delta q_2\rangle/(\langle q_1\rangle\langle q_2\rangle)$，这里不考虑更高阶的关联项。

经过以上理论考虑，我们使用COAL-SH模型通过不考虑夸克密度和引入夸克密度涨落项来计算奇异强子K^+、Ξ^-、ϕ和Λ的产额。经过严格推导我们得出在不考虑夸克密度涨落的情况下，奇异强子的产额比$O_{K-\Xi-\phi-\Lambda} = 1.1$；引入夸克密度涨落项，需要通过夸克密度涨落关联因子$\alpha_{q_1q_2}$才可以提取到奇异夸克相对密度涨落值Δs。目前无法直接得到$\alpha_{q_1q_2}$的数值，这里主要考虑了两种极限情况，即夸克之间没有关联或者夸克之间有很强的关联。如果夸克之间没有关联，则$\langle\delta q_1\delta q_2\rangle = \langle\delta q_1\rangle\langle\delta q_2\rangle$，且$\alpha_{q_1q_2} = 0$，那么奇异强子的产额比$O_{K-\Xi-\phi-\Lambda} = g(1 + \Delta s)$，式中$g$为常数，可以看出产额比$O_{K-\Xi-\phi-\Lambda}$与奇异夸克相对密度涨落值Δs成线性关系。若夸克之间有强关联，则$\langle\delta q_1\delta q_2\rangle = \sqrt{\langle(\delta q_1)^2\rangle\langle(\delta q_2)^2\rangle}$，且$\alpha_{q_1q_2} = \sqrt{\Delta q_1\Delta q_2}$，此时奇异强子的产额比为$O_{K-\Xi-\phi-\Lambda} = g\dfrac{1 + \sqrt{\Delta\bar{s}\Delta u}}{1 + \sqrt{\Delta\bar{s}\Delta s}} \times \dfrac{1 + \Delta s + 2\sqrt{\Delta s\Delta d}}{1 + \sqrt{\Delta s\Delta d} + \sqrt{\Delta s\Delta u} + \sqrt{\Delta u\Delta d}}$，可以发现如果Δs = Δd = Δu，那么产额比即为一个常数g，则与碰撞能量无关。但是由SU(3)对称性破缺可以知道，s夸克的质量要远大于u、d夸克质量，且在热密物质中s夸克与u、d夸克之间的相互作用是不同的[148]，则Δs与Δu、Δd之间应该是不同的，因此，奇异强子的产额比一定会受到奇异夸克相对密度涨落值Δs的影响[24]，更详细的推导过程见文献[24]。

根据以上分析，为了得到奇异强子的产额比$O_{K-\Xi-\phi-\Lambda}$，首先需要从不同的重离子碰撞实验中提取了奇异强子K^+、Ξ^-、ϕ和Λ的产额，同时为了说明在重离子碰撞中奇异夸克相对密度涨落可能依赖于碰撞能量，表2显示了在$\alpha_{q_1q_2} = 0$的情况下，用COAL-SH模型中$g = 1.1$提取的Δs的值。

表2 在SPS能区的Pb+Pb碰撞实验(0%~7.2%)中，在中心碰撞(0%~7.2%)、全快度空间内测量的奇异强子产额及其产额比[149]

Table 2 Yields of strange hadron in full rapidity space from central (0%~7.2% centrality) Pb+Pb collisions at SPS energies measured by the NA49 Collaboration[149]

E	$\sqrt{s_{NN}}$	Ξ^-	K^+	Λ	ϕ	$O_{K-\Xi-\phi-\Lambda}$	T_c	Δs
20	6.3	1.50±0.13	40.7±0.7	27.1±0.2	1.89±0.31	1.19±0.22	131.3	0.08±0.20
30	7.6	2.42±0.19	52.9±0.9	36.9±0.3	1.84±0.22	1.88±0.27	140.1	0.71±0.25
40	8.8	2.96±0.20	59.1±1.9	43.1±0.4	2.55±0.17	1.59±0.16	146.1	0.44±0.15
80	12.3	3.80±0.26	76.9±2.0	50.1±0.6	4.04±0.19	1.44±0.13	153.5	0.31±0.12

从表2可以看出，Δs对碰撞能量的依赖表现出非单调的行为，更多的表格统计见文献[24]。图24更加直观地展示出产额比$O_{K-\Xi-\phi-\Lambda}$与对撞能量$\sqrt{S_{NN}}$的关系。

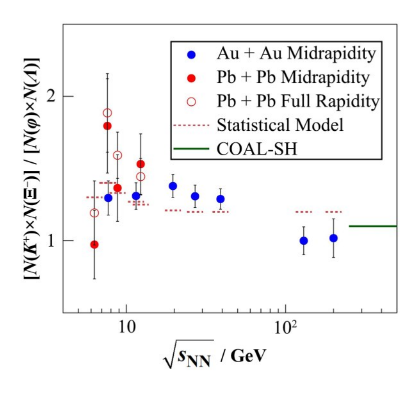


图24 奇异强子产额比$O_{K-\Xi-\phi-\Lambda}$的能量依赖性图
圆点为实验结果，最右侧实线为不考虑夸克密度涨落COAL-SH模型的结果，虚线表示统计模型的结果

Fig.24 Collision energy $\sqrt{s_{NN}}$ dependence of the ratio $O_{K-\Xi-\phi-\Lambda}$ in central Pb+Pb collisions at SPS energies and in central Au+Au collisions at RHIC energies

从图24可以清晰地看到，奇异强子产额比$O_{K-\Xi-\phi-\Lambda}$对能量的变化呈现出一个非单调的行为，该现象与文献[22]中提出的核子产额比O_{p-d-t}对能量有非单调依赖性的行为极其相似，且非单调的行为变化都发生在质心能量8 GeV左右。图中最右边的线表示COAL-SH模型不考虑夸克密度涨落的结果，是一个常数，与能量无关，但其值与$\sqrt{s_{NN}}$ = 200 GeV能量下的实验结果接近，因为$\sqrt{s_{NN}}$ = 200 GeV的能量比较高，该能量下的相变一定处于平滑交叉相变区域且离临界点较远，那么这里的夸克密度等物理量的涨落应该很小，所以$\sqrt{s_{NN}}$= 200 GeV以上能量的实验结果可以用不考虑夸克密度涨落的COAL-SH模型描述。在较低的能量区域下，可以发现产额比对能量的非单调依赖性，这里可以用考虑了夸克密度涨落的COAL-SH模型来解释，根据上文讨论可以知道奇异夸克相对密度涨落Δs会影响对奇异强子产额比，那么奇异强子产额比对能量的非单调依赖性行为可以反映了奇异夸克相对密度涨落Δs对能量也有非单调依赖性，该行为在上述表里也有呈现出。可以用以下物理过程解释图表呈现出的现象：在较高能量下的中心碰撞中，产生的QGP重子化学势较小，从QGP到强子物质的相变更接近于平滑过渡的二阶相变，因此在这些碰撞能量下产生的物质的密度涨落是微不足道的。随着碰撞能量逐渐降低，QGP相变在温度和重子化学势平面上的演化轨迹可能接近或者经过QCD相图的临界点，那么此时的物质将产生较大的密度涨落。随着碰撞能量的进一步降低，其演化轨迹将远离临界点而进入一阶相变区域，此时的热密物质也会产生较大的密度涨落，因为一阶相变通常伴随着Spinodal不稳定性。要是碰撞能量继续降低，物质的密度涨落将减小，因为此时产生的QGP物质的寿命较短且尺寸较小。该物理过程正如图24所示的非单调变化行为相符，表明这些碰撞中产生的QGP的演化轨迹可能已经达到或接近临界点或经历了一阶相变。为了验证以上结论，我们也使用了统计模型[150−151]来计算奇异强子产额比，如图中的短横线为THERMUS程序包[151]计算的结果，可以发现其与不考虑夸克密度涨落的COAL-SH模型的计算结果都无法描述奇异强子产额比$O_{K-\Xi-\phi-\Lambda}$对能量变化呈非单调变化的实验结果。因此我们认为在实验中可以通过奇异强子产额比$O_{K-\Xi-\phi-\Lambda}$作为探针来探测QCD相变的临界点。

6 结语

利用具有电荷守恒性质的弦融化版多相输运(AMPT)模型，研究了守恒荷(重子数、电荷数和奇异数)多重分布的矩、矩积、累积量、累积量比率和关联函数等涨落观测量，AMPT模型计算结果基本能够描述STAR束流能量扫描实验数据。我们的工作中揭示了相对论重离子碰撞动力学演化过程中的几个关键效应对涨落的影响，在重子数涨落研究中，发现AMPT模型的结果与重子数守恒的预期一致，是

由于重子数守恒引起的多重子(质子)关联所导致；而在奇异数和电荷数涨落研究中，发现它们是由成对产生效应引起的。由于在原有AMPT模型中没有包含QCD临界涨落的物理机制，我们的结果只能为寻找相对论重离子碰撞中CEP处可能的临界行为提供一个基线。但在AMPT模型中初步引入了临界密度涨落，研究发现它对净质子数高阶矩的影响较小，没有达到预期的效果，在合并模型COAL-SH中也考虑了奇异夸克密度涨落，发现奇异强子的产额比会受到奇异夸克相对密度涨落的影响。这些研究工作为理解相对论重离子碰撞实验中守恒荷的临界涨落提供了一些重要理论参考。未来结合QCD临界涨落的理论进一步发展AMPT模型，将更有助于在未来一系列较低能量的固定靶重离子实验中来探索QCD相变和寻找QCD临界点。

致谢 感谢与马余刚、罗晓峰、柯治明、黄梅、付伟杰等教授的有益讨论，感谢林子威教授提供AMPT代码和指导，感谢钟晨博士维护复旦核物理超级计算平台。

作者贡献声明 陈倩负责计算模型开发，程序设计，数据分析，文章撰写；马国亮负责指导计算模型开发、程序设计和数据分析，文章修改；陈金辉负责指导计算模型开发、程序设计和数据分析，审阅文章。

参考文献

1 Gross D J, Wilczek F. Ultraviolet behavior of non-abelian gauge theories[J]. Physical Review Letters, 1973, **30**(26): 1343 - 1346. DOI: 10.1103/physrevlett.30.1343.

2 David Politzer H. Reliable perturbative results for strong interactions? [J]. Physical Review Letters, 1973, **30**(26): 1346 - 1349. DOI: 10.1103/physrevlett.30.1346.

3 Hattori K, Huang X G. Novel quantum phenomena induced by strong magnetic fields in heavy-ion collisions [J]. Nuclear Science and Techniques, 2017, **28**(2): 26. DOI: 10.1007/s41365-016-0178-3.

4 Shanmugam K T, Chan I, Morandi C. Regulation of nitrogen fixation. nitrogenase-derepressed mutants of Klebsiella pneumoniae[J]. Biochimica et Biophysica Acta (BBA) - Bioenergetics, 1975, **408**(2): 101 - 111. DOI: 10.1016/0005-2728(75)90002-x.

5 Bzdak A, Koch V. Mapping the QCD phase diagram with statistics-friendly distributions[J]. Physical Review C, 2019, **100**(5): 051902. DOI: 10.1103/physrevc. 100.051902.

6 Bzdak A, Esumi S, Koch V, *et al*. Mapping the phases of quantum chromodynamics with beam energy scan[J]. Physics Reports, 2020, **853**: 1 - 87. DOI: 10.1016/j.physrep.2020.01.005.

7 Bazavov A, Bhattacharya T, DeTar C, *et al*. The equation of state in (2+1) -flavor QCD[J]. Physical Review D, 2014, **90**(9): 094503. DOI: 10.1103/physrevd.90.094503.

8 Bellwied R, Borsanyi S, Fodor Z, *et al*. Is there a flavor hierarchy in the deconfinement transition of QCD? [J]. Physical Review Letters, 2013, **111**(20): 202302. DOI: 10.1103/physrevlett.111.202302.

9 Borsanyi S, Fodor Z, Katz S D, *et al*. Freeze-out parameters from electric charge and baryon number fluctuations: is there consistency? [J]. Physical Review Letters, 2014, **113**(5): 052301. DOI: 10.1103/physrevlett.113.052301.

10 Ding H T, Karsch F, Mukherjee S. Thermodynamics of strong-interaction matter from Lattice QCD[J]. International Journal of Modern Physics E, 2015, **24**(10): 1530007. DOI: 10.1142/S0218301315300076.

11 Aoki Y, Endrodi G, Fodor Z, *et al*. The order of the quantum chromodynamics transition predicted by the standard model of particle physics[J]. Nature, 2006, **443** (7112): 675 - 678.

12 Aoki Y, Borsanyi S, Durr S, *et al*. The QCD transition temperature: results with physical masses in the continuum limit II[J]. Journal of High Energy Physics, 2009, **2009**(06): 088. DOI: 10.1088/1126-6708/2009/06/088.

13 Bazavov A, Bhattacharya T, Cheng M, *et al*. The chiral and deconfinement aspects of the QCD transition[J]. Physical Review D, 2012, **85**(5): 054503. DOI: 10.1103/physrevd.85.054503.

14 Ejiri S. Canonical partition function and finite density phase transition in lattice QCD[J]. Physical Review D, 2008, **78**(7): 074507. DOI: 10.1103/physrevd.78.074507.

15 Alford M, Rajagopal K, Wilczek F. QCD at finite baryon density: nucleon droplets and color superconductivity[J]. Physics Letters B, 1998, **422**(1 - 4): 247 - 256. DOI: 10.1016/S0370-2693(98)00051-3.

16 Skokov V, Friman B, Redlich K. The renormalization group and quark number fluctuations in the Polyakov loop extended quark-meson model at finite baryon density [J]. Physical Review C, 2011, **83**(5): 054904. DOI: 10.1103/physrevc.83.054904.

17 Stephanov M A. QCD phase diagram and the critical point [J]. International Journal of Modern Physics A, 2005, **20**

(19): 4387 – 4392. DOI: 10.1142/S0217751X05027965.
18 Karsch F, Redlich K. Has T_c been measured by heavy ion experiments? [J]. Physical Review D, 2011, **84**(5): 051504. DOI: 10.1103/physrevd.84.051504.
19 Stoecker H. Collective flow signals the quark gluon plasma[J]. Nuclear Physics A, 2005, **750**(1): 121 – 147. DOI: 10.1016/j.nuclphysa.2004.12.074.
20 Song H, Zhou Y, Gajdosova K. Collective flow and hydrodynamics in large and small systems at the LHC[J]. Nuclear Science and Techniques, 2017, **28**(7): 99. DOI: 10.1007/s41365-017-0245-4.
21 Lacey R A. Indications for a critical end point in the phase diagram for hot and dense nuclear matter[J]. Physical Review Letters, 2015, **114**(14): 142301. DOI: 10.1103/physrevlett.114.142301.
22 Sun K J, Chen L W, Ko C M, *et al*. Probing QCD critical fluctuations from light nuclei production in relativistic heavy-ion collisions[J]. Physics Letters B, 2017, **774**: 103 – 107. DOI: 10.1016/j.physletb.2017.09.056.
23 Yu N, Zhang D, Luo X. Search for the QCD critical point by transverse velocity dependence of anti-deuteron to deuteron ratio[J]. Chinese Physics C, 2020, **44**(1): 014002. DOI: 10.1088/1674-1137/44/1/014002.
24 Shao T, Chen J, Ko C M, *et al*. Probing QCD critical fluctuations from the yield ratio of strange hadrons in relativistic heavy-ion collisions[J]. Physics Letters B, 2020, **801**: 135177. DOI: 10.1016/j.physletb.2019.135177.
25 Luo X F, Xu N. Search for the QCD critical point with fluctuations of conserved quantities in relativistic heavy-ion collisions at RHIC: an overview[J]. Nuclear Science and Techniques, 2017, **28**(8): 112. DOI: 10.1007/s41365-017-0257-0.
26 Abdallah M S, Adam J, Adamczyk L, *et al*. Cumulants and correlation functions of net-proton, proton, and antiproton multiplicity distributions in Au+Au collisions at energies available at the BNL Relativistic Heavy Ion Collider[J]. Physical Review C, 2021, **104**(2): 024902. DOI: 10.1103/physrevc.104.024902.
27 Nayak T K. Study of the fluctuations of net-charge and net-protons using higher order moments[J]. Nuclear Physics A, 2009, **830**(1 – 4): 555c – 558c. DOI: 10.1016/j.nuclphysa.2009.09.046.
28 Luo X. Probing the QCD critical point by higher moments of net-proton multiplicity distributions at STAR [J]. Open Physics, 2012, **10**(6): 1372 – 1374. DOI: 10.2478/s11534-012-0080-5/html.
29 Zhang Y, STAR Collaboration. QCD critical point and net-proton number fluctuations at RHIC-STAR[J]. EPJ Web of Conferences, 2022, **259**: 10002. DOI: 10.1051/epjconf/202225910002.
30 马余刚. 2022年原子核物理科技热点回眸[J]. 科技导报, 2023, **41**(1): 14 – 29.
MA Yugang. Annual review of the advances in nuclear physics[J]. Science & Technology Review, 2023, **41**(1): 14 – 29.
31 罗晓峰, 刘峰, 许怒. 万亿摄氏度下烹煮夸克汤:核物质相结构和量子色动力学相变临界点的实验研究[J]. 物理, 2021, **50**(2): 98 – 107. DOI: 10.7693/wl20210205.
LUO Xiaofeng, LIU Feng, XU Nu. Quark soup cooking at trillions of degrees: experimental study on the phase structure of nuclear matter and the quantum chromodynamics critical point[J]. Physics, 2021, **50**(2): 98 – 107. DOI: 10.7693/wl20210205.
32 张宇, 张定伟, 罗晓峰. 相对论重离子碰撞中QCD相图的实验研究[J]. 核技术, 2023, **46**(4): 040001. DOI: 10.11889/j.0253-3219.2023.hjs.46.040001.
ZHANG Yu, ZHANG Dingwei, LUO Xiaofeng. Experimental study of the QCD phase diagram in relativistic heavy-ion collisions[J]. Nuclear Techniques, 2023, **46**(4): 040001. DOI: 10.11889/j. 0253-3219.2023. hjs.46.040001.
33 许坤, 黄梅. QCD临界终点与重子数扰动[J]. 核技术, 2023, **46**(4): 040005. DOI: 10.11889/j. 0253-3219.2023. hjs.46.040005.
XU Kun, HUANG Mei. QCD critical end point and baryon number fluctuation[J]. Nuclear Techniques, 2023, **46**(4): 040005. DOI: 10.11889/j. 0253-3219.2023. hjs. 46. 040005.
34 尹诗, 谈阳阳, 付伟杰. 临界现象与泛函重整化群[J]. 核技术, 2023, **46**(4): 040002. DOI: 10.11889/j.0253-3219. 2023.hjs.46.040002.
YIN Shi, TAN Yangyang, FU Weijie. Critical phenomena and functional renormalization group[J]. Nuclear Techniques, 2023, **46**(4): 040002. DOI: 10.11889/j.0253-3219.2023.hjs.46.040002.
35 Zhang H, Hou D, Kojo T, *et al*. Functional renormalization group study of the Quark-Meson model with Ω meson[J]. Physical Review D, 2017, **96**(11): 114029. DOI: 10.1103/physrevd.96.114029.
36 Mitter M, Pawlowski J M, Strodthoff N. Chiral symmetry breaking in continuum QCD[J]. Physical Review D, 2015, **91**(5): 054035. DOI: 10.1103/physrevd.91.054035.

37 Herbst T K, Mitter M, Pawlowski J M, *et al.* Thermodynamics of QCD at vanishing density[J]. Physics Letters B, 2014, **731**: 248 – 256. DOI: 10.1016/j.physletb.2014.02.045.

38 Fu W, Pawlowski J M, Rennecke F. The QCD phase structure at finite temperature and density[J]. Physical Review D, 2020, **101**(5): 054032. DOI: 10.1103/physrevd.101.054032.

39 Fukushima K. Chiral effective model with the Polyakov loop[J]. Physics Letters B, 2004, **591**(3 – 4): 277 – 284. DOI: 10.1016/j.physletb.2004.04.027.

40 Pisarski R D, Skokov V V. Chiral matrix model of the semi-Quark Gluon Plasma in QCD[J]. Physical Review D, 2016, **94**(3): 034015. DOI: 10.1103/physrevd. 94. 034015.

41 Li Z, Chen Y, Li D, *et al.* Locating the QCD critical end point through the peaked baryon number susceptibilities along the freeze-out line[J]. Chinese Physics C, 2018, **42**(1): 013103. DOI: 10.1088/1674-1137/42/1/013103.

42 Luo X, Shi S, Xu N, *et al.* A study of the properties of the QCD phase diagram in high-energy nuclear collisions[J]. Particles, 2020, **3**(2): 278 – 307. DOI: 10.3390/particles3020022.

43 丁亨通, 李胜泰, 刘俊宏. 强磁场下的格点QCD研究进展[J]. 核技术, 2023, **46**(4): 040008. DOI: 10.11889/j.0253-3219.2023.hjs.46.040008.
DING Hengtong, LI Shengtai, LIU Junhong. Progress on QCD properties in strong magnetic fields from lattice QCD[J]. Nuclear Techniques, 2023, **46**(4): 040008. DOI: 10.11889/j.0253-3219.2023.hjs.46.040008.

44 李甫鹏, 庞龙刚, 王新年. 基于机器学习的重离子碰撞中QCD相变的研究[J]. 核技术, 2023, **46**(4): 040014. DOI: 10.11889/j.0253-3219.2023.hjs.46.040014.
LI Fupeng, PANG Longgang, WANG Xinnian. Application of machine learning to the study of QCD transition in heavy ion collisions[J]. Nuclear Techniques, 2023, **46**(4): 040014. DOI: 10.11889/j. 0253-3219.2023. hjs.46.040014.

45 吴善进, 宋慧超. QCD临界点附近的动力学临界涨落[J]. 核技术, 2023, **46**(4): 040004. DOI: 10.11889/j.0253-3219.2023.hjs.46.040004.
WU Shanjin, SONG Huichao. Critical dynamical fluctuations near the QCD critical point[J]. Nuclear Techniques, 2023, **46**(4): 040004. DOI: 10.11889/j.0253-3219.2023.hjs.46.040004.

46 Stephanov M A. Non-Gaussian fluctuations near the QCD critical point[J]. Physical Review Letters, 2009, **102**(3): 032301. DOI: 10.1103/physrevlett.102.032301.

47 Stephanov M A. On the sign of kurtosis near the QCD critical point[J]. Physical Review Letters, 2011, **107**(5): 052301. DOI: 10.1103/physrevlett.107.052301.

48 Athanasiou C, Rajagopal K, Stephanov M. Using higher moments of fluctuations and their ratios in the search for the QCD critical point[J]. Physical Review D, 2010, **82**(7): 074008. DOI: 10.1103/physrevd.82.074008.

49 Cheng M, Hegde P, Jung C, *et al.* Baryon number, strangeness and electric charge fluctuations in QCD at high temperature[J]. Physical Review D, 2009, **79**(7): 074505. DOI: 10.1103/physrevd.79.074505.

50 Gavai R V, Gupta S. Lattice QCD predictions for shapes of event distributions along the freezeout curve in heavy-ion collisions[J]. Physics Letters B, 2011, **696**(5): 459 – 463. DOI: 10.1016/j.physletb.2011.01.006.

51 Chen L Z, Zhao Y Y, Wu J, *et al.* The sixth order cumulant of net-proton number in Binomial distribution at $\sqrt{s_{\rm NN}}$= 200 GeV[J]. Chinese Physics C, 2021, **45**(10): 104103. DOI: 10.1088/1674-1137/ac1b98.

52 Ceglowski W S, Ercegrovich C D, Pearson N S. Effects of pesticides on the reticuloendothelial system[J]. Advances in Experimental Medicine and Biology, 1979, **121**(A): 569 – 576. DOI: 10.1007/978-1-4684-3593-1_47.

53 Beck M L, Freihaut B, Henry R, *et al.* A serum haemagglutinating property dependent upon polycarboxyl groups[J]. British Journal of Haematology, 1975, **29**(1): 149 – 156. DOI: 10.1111/j.1365-2141.1975.tb01808.x.

54 Gupta S, Luo X F, Mohanty B, *et al.* Scale for the phase diagram of quantum chromodynamics[J]. Science, 2011, **332**(6037): 1525 – 1528. DOI: 10.1126/science.1204621.

55 Bazavov A, Ding H T, Hegde P, *et al.* Freeze-out conditions in heavy ion collisions from QCD thermodynamics[J]. Physical Review Letters, 2012, **109**(19): 192302. DOI: 10.1103/physrevlett.109.192302.

56 Fukushima K, Hatsuda T. The phase diagram of dense QCD[J]. Reports on Progress in Physics, 2011, **74**(1): 014001. DOI: 10.1088/0034-4885/74/1/014001.

57 Aboona B E, Adam J, Adamczyk L, *et al.* Beam energy dependence of fifth and sixth-order net-proton number fluctuations in Au+Au collisions at RHIC[J]. Physical Review Letters, 2023, **130**(8): 082301. DOI: 10.1103/physrevlett.130.082301.

58 马余刚, 许怒, 刘峰. 基于HIAF集群的QCD相结构研究[J]. 中国科学: 物理学 力学 天文学, 2020, **50**(11):

120 – 128.

MA Yugang, XU Nu, LIU Feng. Study of the QCD phase structure at HIAF[J]. Scientia Sinica (Physica, Mechanica & Astronomica), 2020, **50**(11): 120 – 128.

59 Adamczyk L, Adkins J K, Agakishiev G, *et al*. Beam energy dependence of moments of the net-charge multiplicity distributions in Au+Au collisions at RHIC[J]. Physical Review Letters, 2014, **113**(9): 092301. DOI: 10.1103/physrevlett.113.092301.

60 Adam J, Adamczyk L, Adams J R, *et al*. Nonmonotonic energy dependence of net-proton number fluctuations[J]. Physical Review Letters, 2021, **126**(9): 092301. DOI: 10.1103/physrevlett.126.092301.

61 Pandav A. Measurement of cumulants of conserved charge multiplicity distributions in Au+Au collisions from the STAR experiment[J]. Nuclear Physics A, 2021, **1005**: 121936. DOI: 10.1016/j.nuclphysa.2020.121936.

62 Thäder J. Higher moments of net-particle multiplicity distributions[J]. Nuclear Physics A, 2016, **956**: 320 – 323. DOI: 10.1016/j.nuclphysa.2016.02.047.

63 Abdallah M S, Aboona B E, Adam J, *et al*. Measurements of proton high-order cumulants in $\sqrt{s_{NN}}$=3 GeV Au+Au collisions and implications for the QCD critical point[J]. Physical Review Letters, 2022, **128**(20): 202303. DOI: 10.1103/physrevlett.128.202303.

64 Luo X. Search for the QCD critical point by higher moments of net-proton multiplicity distributions at STAR [J]. Nuclear Physics A, 2013, **904** – **905**: 911c – 914c. DOI: 10.1016/j.nuclphysa.2013.02.163.

65 Luo X F, Mohanty B, Ritter H G, *et al*. Energy dependence of high moments for net-proton distributions [J]. Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics, 2010, **37**(9): 094061. DOI: 10.1088/0954-3899/37/9/094061.

66 Ling B, Stephanov M A. Acceptance dependence of fluctuation measures near the QCD critical point[J]. Physical Review C, 2016, **93**(3): 034915. DOI: 10.1103/physrevc.93.034915.

67 Kitazawa M, Luo X. Properties and uses of factorial cumulants in relativistic heavy-ion collisions[J]. Physical Review C, 2017, **96**(2): 024910. DOI: 10.1103/physrevc.96.024910.

68 Bzdak A, Koch V, Strodthoff N. Cumulants and correlation functions versus the QCD phase diagram[J]. Physical Review C, 2017, **95**(5): 054906. DOI: 10.1103/physrevc.95.054906.

69 Chen Q, Wang H, Ma G L. Probing fluctuations and correlations of strangeness by net-kaon cumulants in Au+Au collisions at $\sqrt{s_{NN}}$= 7.7 GeV[J]. Physical Review C, 2023, **107**(3): 034910. DOI: 10.1103/physrevc.107.034910.

70 Lin Y, Chen L, Li Z. Correlation functions of net-proton multiplicity distributions in Au+Au collisions at energies available at the BNL Relativistic Heavy Ion Collider from a multiphase transport model[J]. Physical Review C, 2017, **96**(4): 044906. DOI: 10.1103/physrevc.96.044906.

71 Lin Z W, Ko C M, Li B A, *et al*. Multiphase transport model for relativistic heavy ion collisions[J]. Physical Review C - Nuclear Physics, 2005, **72**(6): 064901. DOI: 10.1103/physrevc.72.064901.

72 Ma G L, Lin Z W. Predictions for $\sqrt{s_{NN}}$=5.02 TeV Pb+Pb collisions from a multi-phase transport model[J]. Physical Review C, 2016, **93**(5): 054911. DOI: 10.1103/physrevc.93.054911.

73 Ma G L, Zhang B. Effects of final state interactions on charge separation in relativistic heavy ion collisions[J]. Physics Letters B, 2011, **700**(1): 39 – 43. DOI: 10.1016/j.physletb.2011.04.057.

74 Ma G L. Dijet asymmetry in Pb+Pb collisions at $\sqrt{s_{NN}}$= 2.76 TeV within a multiphase transport model[J]. Physical Review C, 2013, **87**(6): 064901. DOI: 10.1103/physrevc.87.064901.

75 Bozek P, Bzdak A, Ma G L. Rapidity dependence of elliptic and triangular flow in proton-nucleus collisions from collective dynamics[J]. Physics Letters B, 2015, **748**: 301 – 305. DOI: 10.1016/j.physletb.2015.06.007.

76 Bzdak A, Ma G L. Elliptic and triangular flow in p+Pb and peripheral Pb+Pb collisions from parton scatterings [J]. Physical Review Letters, 2014, **113**(25): 252301. DOI: 10.1103/physrevlett.113.252301.

77 聂茂武, 马国亮. 整体喷注的输运模型研究[J]. 核技术, 2014, **37**(10): 100519. DOI: 10.11889/j.0253-3219.2014.hjs.37.100519.

NIE Maowu, MA Guoliang. Full jet in a multi-phase transport model[J]. Nuclear Techniques, 2014, **37**(10): 100519. DOI: 10.11889/j.0253-3219.2014.hjs.37.100519.

78 马国亮. 相对论重离子碰撞的输运模型研究[J]. 原子核物理评论, 2017, **34**(3): 4. DOI: 10.11804/NuclPhysRev.34.03.370.

MA Guoliang. Transport model studies on relativistic heavy-ion collisions[J]. Nuclear Physics Review, 2017, **34**

(3): 4. DOI: 10.11804/NuclPhysRev.34.03.370.

79 Wang X N, Gyulassy M. HIGING: a Monte Carlo model for multiple jet production in pp, pA, and AA collisions [J]. Physical Review D, Particles and Fields, 1991, **44** (11): 3501 – 3516. DOI: 10.1103/physrevd.44.3501.

80 Wang X N, Gyulassy M. HIJING 1.0: a Monte Carlo program for parton and particle production in high energy hadronic and nuclear collisions[J]. Computer Physics Communications, 1994, **83**(2 – 3): 307 – 331. DOI: 10. 1016/0010-4655(94)90057-4.

81 Sjostrand T, Mrenna S, Skands P. PYTHIA 6.4 physics and manual[J]. Journal of High Energy Physics, 2006, **2006**(05): 026. DOI: 10.1088/1126-6708/2006/05/026.

82 Zhang B. ZPC 1.0.1: a parton cascade for ultrarelativistic heavy ion collisions[J]. Computer Physics Communications, 1998, **109**(2 – 3): 193 – 206. DOI: 10.1016/S0010-4655(98)00010-1.

83 Li B A, Ko C M. Formation of superdense hadronic matter in high energy heavy-ion collisions[J]. Physical Review C, 1995, **52**(4): 2037 – 2063. DOI: 10.1103/ physrevc.52.2037.

84 He Y, Lin Z W. Improved quark coalescence for a multi-phase transport model[J]. Physical Review C, 2017, **96** (1): 014910. DOI: 10.1103/physrevc.96.014910.

85 Luo X. Unified description of efficiency correction and error estimation for moments of conserved quantities in heavy-ion collisions[J]. Physical Review C, 2015, **91**(3): 034907. DOI: 10.1103/physrevc.91.034907.

86 Luo X, Xu J, Mohanty B, *et al*. Volume fluctuation and autocorrelation effects in the moment analysis of net-proton multiplicity distributions in heavy-ion collisions [J]. Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics, 2013, **40**(10): 105104. DOI: 10.1088/0954-3899/40/10/ 105104.

87 He S, Luo X. Event-by-event efficiency fluctuations and efficiency correction for cumulants of superposed multiplicity distributions in relativistic heavy-ion collision experiments[J]. Chinese Physics C, 2018, **42**(10): 104001. DOI: 10.1088/1674-1137/42/10/104001.

88 Chen L Z, Chen Y, Wu Y F. Finite-size behavior near the critical point of QCD phase-transition[J]. Chinese Physics C, 2014, **38**(10): 104103. DOI: 10.1088/1674-1137/38/10/ 104103.

89 Chen Q, Ma G L. Dynamical development of proton cumulants and correlation functions in Au+Au collisions at $\sqrt{s_{NN}}$=7.7 GeV from a multiphase transport model[J]. Physical Review C, 2022, **106**(1): 014907. DOI: 10.1103/ physrevc.106.014907.

90 Tarnowsky T J, Westfall G D. First study of the negative binomial distribution applied to higher moments of net-charge and net-proton multiplicity distributions[J]. Physics Letters B, 2013, **724**(1 – 3): 51 – 55. DOI: 10. 1016/j.physletb.2013.05.064.

91 Huang L, Ma G L. Study on higher moments of net-charge multiplicity distributions using a multiphase transport model[J]. Chinese Physics C, 2021, **45**(7): 074110. DOI: 10.1088/1674-1137/abfd29.

92 Braun-Munzinger P, Redlich K, Stachel J. Particle production in heavy ion collisions[M]. Quark – Gluon Plasma 3. World Scientific, 2004: 491 – 599[2023-04-19]. DOI: 10.1142/9789812795533_0008.

93 Asakawa M, Heinz U, Muller B. Fluctuation probes of quark deconfinement[J]. Physical Review Letters, 2000, **85**(10): 2072 – 2075. DOI: 10.1103/physrevlett.85.2072.

94 Asakawa M, Ejiri S, Kitazawa M. Third moments of conserved charges as probes of QCD phase structure[J]. Physical Review Letters, 2009, **103**(26): 262301. DOI: 10.1103/physrevlett.103.262301.

95 Wang H S, Ma G L, Lin Z W, *et al*. Thermodynamics of partonic matter in relativistic heavy-ion collisions from a multiphase transport model[J]. Physical Review C, 2022, **105**(3): 034912. DOI: 10.1103/physrevc.105.034912.

96 Bzdak A, Koch V, Strodthoff N. Cumulants and correlation functions vs the QCD phase diagram[J]. Physical Review C, 2017, **95**(5): 054906. DOI: 10.1103/ physrevc.95.054906.

97 Bzdak A, Koch V. Rapidity dependence of proton cumulants and correlation functions[J]. Physical Review C, 2017, **96**(5): 054905. DOI: 10.1103/physrevc. 96. 054905.

98 Brewer J, Mukherjee S, Rajagopal K, *et al*. Searching for the QCD critical point via the rapidity dependence of cumulants[J]. Physical Review C, 2018, **98**(6): 061901. DOI: 10.1103/physrevc.98.061901.

99 Mukherjee S, Venugopalan R, Yin Y. Universal off-equilibrium scaling of critical cumulants in the QCD phase diagram[J]. Physical Review Letters, 2016, **117** (22): 222301. DOI: 10.1103/physrevlett.117.222301.

100 Wu S, Wu Z, Song H. Universal scaling of the sigma field and net-protons from Langevin dynamics of model A[J]. Physical Review C, 2019, **99**(6): 064902. DOI: 10.1103/ physrevc.99.064902.

101 Asakawa M, Kitazawa M, Müller B. Issues with search for critical point in QCD with relativistic heavy ion collisions[J]. Physical Review C, 2020, **101**(3): 034913. DOI: 10.1103/physrevc.101.034913.

102 Ohnishi Y, Kitazawa M, Asakawa M. Thermal blurring of event-by-event fluctuations provoked by rapidity conversion[J]. Physical Review C, 2016, **94**(4): 044905. DOI: 10.1103/physrevc.94.044905.

103 Sakaida M, Asakawa M, Fujii H, *et al*. Dynamical evolution of critical fluctuations and its observation in heavy ion collisions[J]. Physical Review C, 2017, **95**(6): 064905. DOI: 10.1103/physrevc.95.064905.

104 Nahrgang M, Bluhm M, Schaefer T, *et al*. Diffusive dynamics of critical fluctuations near the QCD critical point[J]. Physical Review D, 2019, **99**(11): 116015. DOI: 10.1103/physrevd.99.116015.

105 Bzdak A, Koch V, Skokov V. Correlated stopping, proton clusters and higher order proton cumulants[J]. The European Physical Journal C, 2017, **77**(5): 288. DOI: 10.1140/epjc/s10052-017-4847-0.

106 Vovchenko V, Koch V, Shen C. Proton number cumulants and correlation functions in Au-Au collisions at $\sqrt{s_{\rm NN}}$= 7.7-200 GeV from hydrodynamics[J]. Physical Review C, 2022, **105**(1): 014904. DOI: 10.1103/physrevc. 105. 014904.

107 Kitazawa M, Asakawa M. Revealing baryon number fluctuations from proton number fluctuations in relativistic heavy ion collisions[J]. Physical Review C, 2012, **85**(2): 021901. DOI: 10.1103/physrevc.85.021901.

108 Kitazawa M, Asakawa M. Relation between baryon number fluctuations and experimentally observed proton number fluctuations in relativistic heavy ion collisions[J]. Physical Review C, 2012, **86**(2): 024904. DOI: 10.1103/physrevc.86.024904.

109 Bzdak A, Koch V. Acceptance corrections to net baryon and net charge cumulants[J]. Physical Review C, 2012, **86**(4): 044904. DOI: 10.1103/physrevc.86.044904.

110 Rafelski J, Müller B. Strangeness production in the quark-gluon plasma[J]. Physical Review Letters, 1982, **48**(16): 1066‒1069. DOI: 10.1103/physrevlett.48.1066.

111 Alt C, Anticic T, Baatar B, *et al*. Pion and kaon production in central Pb+Pb collisions at 20A and 30A GeV: evidence for the onset of deconfinement[J]. Physical Review C, 2008, **77**(2): 024903. DOI: 10.1103/physrevc.77.024903.

112 Abelev B I, Aggarwal M M, Ahammed Z, *et al*. Enhanced strange baryon production in Au+Au collisions compared to p+p at $\sqrt{s}$ = 200 GeV[J]. Physical Review C, 2008, **77**(4): 044908. DOI: 10.1103/physrevc.77.044908.

113 Bellwied R, Noronha-Hostler J, Parotto P, *et al*. Freeze-out temperature from net-kaon fluctuations at energies available at the BNL Relativistic Heavy Ion Collider[J]. Physical Review C, 2019, **99**(3): 034912. DOI: 10.1103/physrevc.99.034912.

114 Bluhm M, Nahrgang M. Freeze-out conditions from strangeness observables at RHIC[J]. The European Physical Journal C, 2019, **79**(2): 155. DOI: 10.1140/epjc/s10052-019-6661-3.

115 Ratti C, Bellwied R, Cristoforetti M, *et al*. Are there hadronic bound states above the QCD transition temperature? [J]. Physical Review D, 2012, **85**(1): 014004. DOI: 10.1103/physrevd.85.014004.

116 Bazavov A, Bhattacharya T, DeTar C E, *et al*. Fluctuations and correlations of net baryon number, electric charge, and strangeness: a comparison of lattice QCD results with the hadron resonance gas model[J]. Physical Review D, 2012, **86**(3): 034509. DOI: 10.1103/physrevd.86.034509.

117 Bazavov A, Ding H T, Hegde P, *et al*. Strangeness at high temperatures: from hadrons to quarks[J]. Physical Review Letters, 2013, **111**(8): 082301. DOI: 10.1103/physrevlett.111.082301.

118 Karsch F, Redlich K. Probing freeze-out conditions in heavy ion collisions with moments of charge fluctuations [J]. Physics Letters B, 2011, **695**(1‒4): 136‒142. DOI: 10.1016/j.physletb.2010.10.046.

119 Majumder A, Müller B. Baryonic strangeness and related susceptibilities in QCD[J]. Physical Review C, 2006, **74**(5): 054901. DOI: 10.1103/physrevc.74.054901.

120 Bollweg D, Goswami J, Kaczmarek O, *et al*. Second order cumulants of conserved charge fluctuations revisited I. Vanishing chemical potentials[J]. Physical Review D, 2021, **104**(7): 074512. DOI: 10.1103/physrevd.104.074512.

121 Fu W J. QCD at finite temperature and density within the fRG approach: an overview[J]. Communications in Theoretical Physics, 2022, **74**(9): 097304. DOI: 10.1088/1572-9494/ac86be.

122 Ding H T, Li S T, Shi Q, *et al*. QCD phase structure in strong magnetic fields[J]. Acta Physica Polonica B Proceedings Supplement, 2021, **14**(2): 403. DOI: 10.5506/APHYSPOLBSUPP.14.403.

123 Jin F, Ma Y G, Ma G L, *et al*. Baryon-Strangeness correlations in Parton/Hadron transport model for Au+Au collisions at $\sqrt{s_{NN}}$=200 GeV[J]. Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics, 2008, **35**(4): 044070. DOI: 10.1088/0954-3899/35/4/044070.

124 Koch V, Majumder A, Randrup J. Baryon-strangeness correlations: a diagnostic of strongly interacting matter[J]. Physical Review Letters, 2005, **95**(18): 182301. DOI: 10.1103/physrevlett.95.182301.

125 Wang D F, Zhang S, Ma Y G. System size dependence of baryon-strangeness correlations in relativistic heavy ion collisions from a multiphase transport model[J]. Physical Review C, 2021, **103**(2): 024901. DOI: 10.1103/physrevc.103.024901.

126 Zhang S, Chen J H, Crawford H, *et al*. Searching for onset of deconfinement via hypernuclei and baryon-strangeness correlations[J]. Physics Letters B, 2010, **684**(4 – 5): 224 – 227. DOI: 10.1016/j.physletb.2010.01.034.

127 Chen J, Keane D, Ma Y, *et al*. Antinuclei in heavy-ion collisions[J]. Physics Reports, 2018, **760**: 1 – 39. DOI: 10.1016/j.physrep.2018.07.002.

128 Shao T, Chen J, Ko C M, *et al*. Yield ratio of hypertriton to light nuclei in heavy-ion collisions from $\sqrt{s_{NN}}$= 4.9 GeV to 2.76 TeV[J]. Chinese Physics C, 2020, **44**(11): 114001. DOI: 10.1088/1674-1137/abadf0.

129 Adamczyk L, Adams J, Adkins J, *et al*. Collision energy dependence of moments of net-kaon multiplicity distributions at RHIC[J]. Physics Letters B, 2018, **785**: 551 – 560. DOI: 10.1016/j.physletb.2018.07.066.

130 Yu N, Liu F, Wu K. Energy and centrality dependence of chemical freeze-out thermodynamics parameters[J]. Physical Review C, 2014, **90**(2): 024913. DOI: 10.1103/physrevc.90.024913.

131 Xu J, Ko C M. Chemical freeze-out in relativistic heavy-ion collisions[J]. Physics Letters B, 2017, **772**: 290 – 293. DOI: 10.1016/j.physletb.2017.06.061.

132 Shao T, Chen J, Ko C M, *et al*. Enhanced production of strange baryons in high-energy nuclear collisions from a multiphase transport model[J]. Physical Review C, 2020, **102**(1): 014906. DOI: 10.1103/physrevc.102.014906.

133 Zhou C, Xu J, Luo X F, *et al*. Cumulants of event-by-event net-strangeness distributions in Au+Au collisions at $\sqrt{s_{NN}}$=7.7-200 GeV within an UrQMD model[J]. Physical Review C, 2017, **96**: 014909. DOI: 10.1103/physrevc.96.014909.

134 Fu W J, Liu Y X, Wu Y L. Fluctuations and correlations of conserved charges in QCD at finite temperature with effective models[J]. Physical Review D, 2010, **81**(1): 014028. DOI: 10.1103/physrevd.81.014028.

135 Chahal N, Dutt S, Kumar A. Quark matter properties and fluctuations of conserved charges in (2+1)-flavored quark model[J]. Chinese Physics C, 2022, **46**(6): 063104. DOI: 10.1088/1674-1137/ac56d0.

136 Jin X H, Chen J H, Lin Z W, *et al*. Explore the QCD phase transition phenomena from a multiphase transport model[J]. Science China Physics, Mechanics & Astronomy, 2019, **62**(1): 11012. DOI: 10.1007/s11433-018-9272-4.

137 Jin X H, Chen J H, Ma Y G, *et al*. Ω and ϕ production in Au+Au collisions at $\sqrt{s_{NN}}$=11.5 and 7.7 GeV in a dynamical quark coalescence model[J]. Nuclear Science and Techniques, 2018, **29**(4): 54. DOI: 10.1007/s41365-018-0393-1.

138 Adamczyk L, Adkins J K, Agakishiev G, *et al*. Energy dependence of moments of net-proton multiplicity distributions at RHIC[J]. Physical Review Letters, 2014, **112**(3): 032302. DOI: 10.1103/physrevlett.112.032302.

139 Vovchenko V, Jiang L, Gorenstein M I, *et al*. Critical point of nuclear matter and beam energy dependence of net proton number fluctuations[J]. Physical Review C, 2018, **98**(2): 024910. DOI: 10.1103/physrevc.98.024910.

140 Hatta Y, Stephanov M A. Proton number fluctuation as a signal of the QCD critical end-point[J]. Physical Review Letters, 2003, **91**(10): 102003. DOI: 10.1103/physrevlett.91.102003.

141 Steinheimer J, Randrup J. Spinodal amplification of density fluctuations in fluid-dynamical simulations of relativistic nuclear collisions[J]. Physical Review Letters, 2012, **109**(21): 212301. DOI: 10.1103/physrevlett. 109.212301.

142 Steinheimer J, Randrup J, Koch V. Non-equilibrium phase transition in relativistic nuclear collisions: importance of the equation of state[J]. Physical Review C, 2014, **89**(3): 034901. DOI: 10.1103/physrevc.89.034901.

143 Herold C, Nahrgang M, Mishustin I, *et al*. Formation of droplets with high baryon density at the QCD phase transition in expanding matter[J]. Nuclear Physics A, 2014, **925**: 14 – 24. DOI: 10.1016/j. nuclphysa. 2014. 01.010.

144 Li F, Ko C M. Spinodal instabilities of baryon-rich quark-gluon plasma in the PNJL model[J]. Physical Review C,

2016, **93**(3): 035205. DOI: 10.1103/physrevc.93.035205.

145 Li F, Ko C M. Spinodal instabilities of baryon-rich quark matter in heavy ion collisions[J]. Physical Review C, 2017, **95**(5): 055203. DOI: 10.1103/physrevc.95.055203.

146 Ko C M. Theoretical perspective on strangeness production[J]. EPJ Web of Conferences, 2018, **171**: 03002. DOI: 10.1051/epjconf/201817103002.

147 Sun K J, Chen L W. Analytical coalescence formula for particle production in relativistic heavy-ion collisions[J]. Physical Review C, 2017, **95**(4): 044905. DOI: 10.1103/physrevc.95.044905.

148 Song T, Plumari S, Greco V, *et al*. Partonic mean-field effects on matter and antimatter elliptic flows[J]. Nuclear Physics A, 2014, **928**: 234 – 246. DOI: 10.1016/j.nuclphysa.2014.05.016.

149 Afanasiev S V, Anticic T, Barna D, *et al*. Energy dependence of pion and kaon production in central Pb+Pb collisions[J]. Physical Review C, 2002, **66**(5): 054902. DOI: 10.1103/physrevc.66.054902.

150 Cleymans J, Oeschler H, Redlich K, *et al*. Comparison of chemical freeze-out criteria in heavy-ion collisions[J]. Physical Review C, 2006, **73**(3): 034905. DOI: 10.1103/physrevc.73.034905.

151 Wheaton S, Cleymans J, Hauer M. THERMUS—a thermal model package for ROOT[J]. Computer Physics Communications, 2009, **180**(1): 23. DOI: 10.1016/j.cpc.2008.08.001.